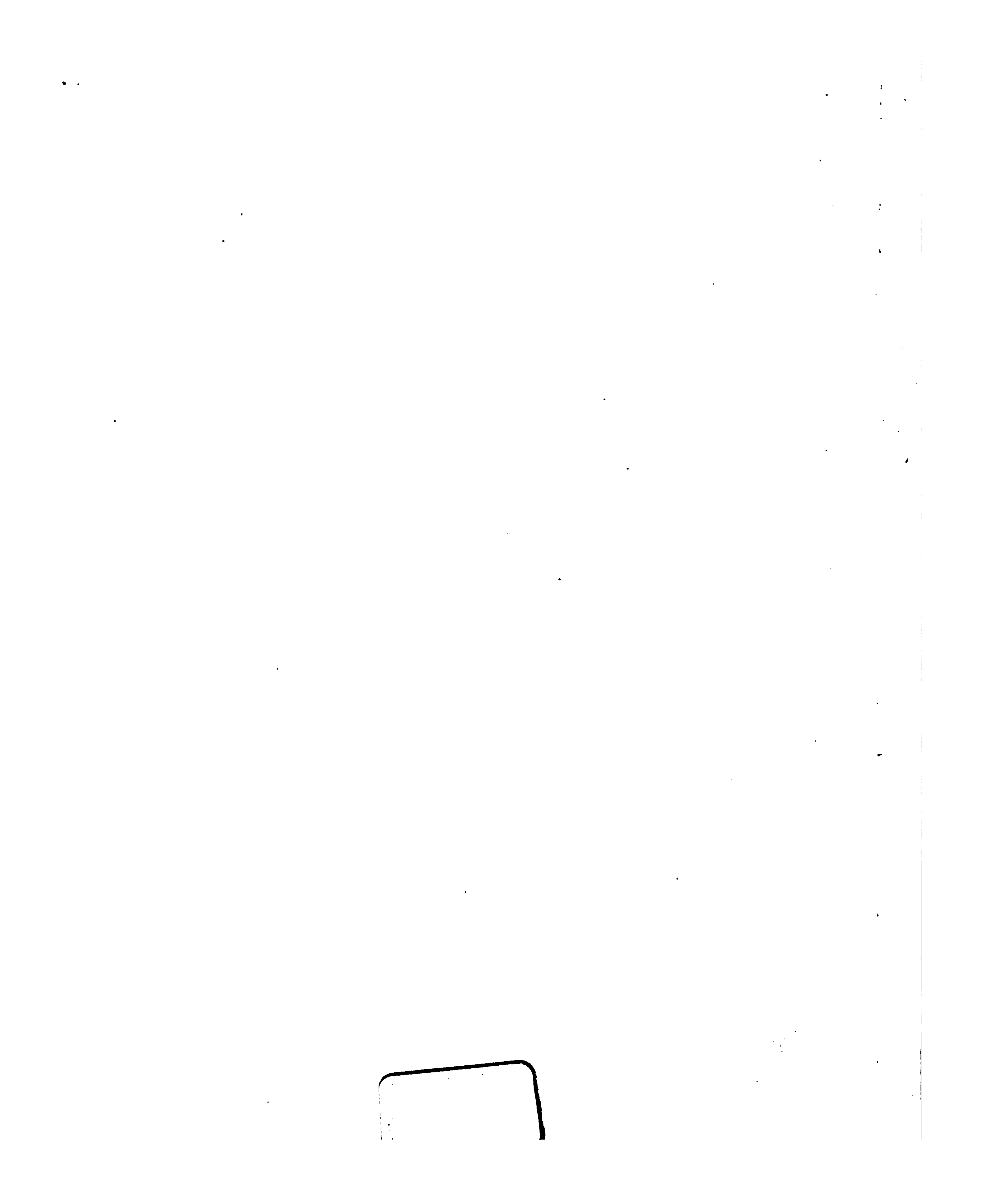




Die

Landen'sche Transformation

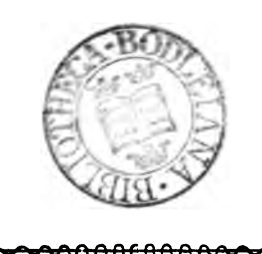
in ihrer

Anwendung auf die Entwickelung der elliptischen Funktionen

von

F. J. Richelot.

Aus einer Correspondenz mit Herrn Professor Schröter.



Königsberg.

Verlag von Hübner & Matz.

1868.

Vorwort.

Die folgenden Mittheilungen sind einer Correspondenz entnommen, zu welcher der Herausgeber durch ein Schreiben seines Freundes Prof. Schröter veranlasst worden ist.

Dieselbe Briefform ist als die geeignetste auch bei der Herausgabe beibehalten.

Der Titel ist so gewählt worden, weil in der That Landen der erste Mathematiker gewesen ist, von welchem eine Vergleichung elliptischer Integrale mit verschiedenen Moduln bekannt geworden ist. Denn, wenngleich seine dahin einschlagende erste Untersuchung Philosophical transactions 1775 pag. 283 (vide Anmerkung) zum Zweck hat den Bogen einer Hyperbel durch die Bögen zweier Ellipsen auszudrücken, so führt doch der analytische Ausdruck seines Theorems auf die Transformation eines elliptischen Integrals zweiter Gattung in ein eben solches mit vergrössertem Modul. Aber Legendre, der die dabei geltende Relation zwischen den betreffenden Argumenten nicht lange nachher in seinen exercises zuerst wieder aufgenommen, und auf alle drei Gattungen angewendet hat, nennt mit Recht Landen den Erfinder der Transformation der elliptischen Integrale im Gegensatz zu Fagnano, dessen sogenanntes Additionstheorem ebenfalls durch geometrische Betrachtungen zuerst gefunden ist, und zu Euler, der die Untersuchungen des letztern weiter geführt hat, ohne auf die des erstern Rücksicht zu nehmen. Dass Lagrange in seiner Abhandlung (Turiner Memoiren 1784 p. 218) worin er die später nach Gauss genannte Transformation der elliptischen Integrale und den Algorithmus der arithmetisch geometrischen Mittel angegeben hat, nirgend der Arbeit Landens erwähnt, dürfte weniger auffallend sein, als dass Legendre nirgend der Abhandlung von Lagrange erwähnt, obgleich er den Zusammenhang der Lagrange'schen und Landen'schen Transformations-Formeln (Theorie des f. e. p. 89) angiebt.

Im Folgenden ist nichts von der Theorie der elliptischen Integrale vorausgesetzt, als das Additionstheorem oder eigentlich nur die sogenannten Grundformeln.

Die Bezeichnungen von Legendre und Jacobi sind fast ohne irgend eine Modification beibehalten worden.

Auf die Deduction der angewendeten Grundformeln der Theorie der elliptischen Functionen, wie auf ein noch weiteres Eingehn in die Natur der Transscendenten habe ich verzichtet, da dies dem Ursprung und Zweck der folgenden Mittheilungen ferne lag.

Königsberg, den 3. März 1868.

Erstes Schreiben des Herrn Professor Dr. Schröter an den Herausgeber.

Breslau, den 15. December 1867.

Gestatten Sie mir Ihnen eine Frage vorzulegen, welche sich auf die Landensche Transformation bezieht.

Die schöne Methode, welche Sie in einer Ihrer Vorlesungen vor circa 25 Jahren Ihren Zuhörern mitgetheilt haben, um direkt aus der genannten Transformation zu der Entwicklung der elliptischen Functionen in unendliche Produkte zu gelangen, wie sie von einem Ihrer damaligen Zuhörer Durège, veröffentlicht ist, führt auch ebenso direkt, wie ich vor Kurzem bei Gelegenheit meiner Arbeiten für das unter meiner Leitung stehende mathematische Seminar erkannt habe, zu der Entwicklung in Reihen. Ich vermuthe nun wohl mit Recht, dass Sie auch diese Ableitung, welche auf der Zerlegung von

$$K, \triangle\, am \left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)$$

in die Summe zweier eben solcher Functionen für den durch die Landensche Transformation vergrösserten Modul beruht, deren Argumente

$$\frac{x}{2} \quad \text{und} \quad \frac{x+\pi}{2}$$

sind, entweder schon damals oder später vorgetragen haben werden, und würde es in diesem Falle für ungeeignet halten, diese meine Bemerkung zu veröffentlichen. Ich erwähne noch hiebei, dass es mir bis jetzt nicht gelungen ist die Entwicklung von

$$\sin am \frac{2Kx}{\pi}, \varkappa$$

auf dieselbe direkte Weise wieder von

$$\triangle\, am \frac{2Kx}{\pi}, \varkappa \quad \text{und} \quad \cos am \frac{2Kx}{\pi}, \varkappa$$

aus der genannten Quelle abzuleiten. Dagegen habe ich bemerkt, dass die analoge Anwendung der Gaussischen Transformation ebenso gelingt.

Ich bin der Meinung, dass eine ausführliche Veröffentlichung Ihrer Vorträge, falls meine obige Vermuthung sich bestätigt, den Mathematikern, namentlich den jüngeren, die nicht Gelegenheit haben sich Ihrer mündlichen Vorträge zu erfreuen, sehr erwünscht sein würde, und ich könnte dann meine sich daran anschliessenden weitern Untersuchungen unbehindert auch publiciren.

Antwort des Herausgebers.

Königsberg, den 26. December 1867.

Sie fragen mich in Ihrem geehrten Schreiben vom 15. December, ob ich ausser in der Vorlesung, welche Durège bei seiner Herausgabe benutzt hat, später die Landensche Transformation zum Uebergang vom elliptischen Integral zu den elliptischen Functionen in einem meiner Vorträge benutzt habe, und namentlich, ob ich bemerkt, dass ebenso einfach und direkt die Reihenentwicklungen auf diesem Wege sich ergeben, als die unendlichen Produkte? —

Es wird Ihnen allerdings auffallend erschienen sein, dass ich in denjenigen spätern Vorlesungen, bei denen ich Sie unter meinen Zuhörern zu haben die Ehre hatte, einen ganz andern Durchgangspunkt gewählt habe, indem ich damals umgekehrt von den Entwicklungen für sinamu, cosamu und Δamu zu dem Integral überging. Andrerseits ist Ihnen durch frühere Mittheilungen bekannt, wie ich theils durch den jedesmaligen Standpunkt der Mehrzahl meiner Zuhörer genöthigt, theils durch das Interesse für den Gegenstand getrieben, in meinen Vorlesungen die verschiedensten Wege einzuschlagen und der übrigen nur anmerkungsweise Erwähnung zu thun pflege. So habe ich auch in meinen Vorlesungen über elliptische Funktionen bis zum Jahr 1860 successive die sehr von einander abweichenden Methoden verfolgt, deren diese Disciplin sich erfreut. Erst im Winter 1860—61 bin ich in einer Vorlesung, an welcher Herr Zöppritz, jetzt Prof. in Giessen, den eifrigsten Antheil nahm, zu jener ältern Methode zurückgekehrt und habe bis dahin ihrer sonst nur gelegentlich erwähnt, wenn ich die Vorlesung aus dem Jahr 1851 ausnehme, welche sehr umfangreich sich auf die unendlichen Doppelprodukte stützte, und in deren zweitem Theil ich die Transformation gerader Ordnung, und namentlich die Landensche und Lagrangesche oder Gaussische durchgenommen habe.

Sie wünschen, mein geehrter Freund, aus Rücksicht für diese früher von mir gehaltenen Vorträge, und um sich nicht in der Veröffentlichung Ihrer neuesten ähnlichen Untersuchungen behindert zu sehn, dass ich Ihnen meine dahin einschlagenden frühern Betrachtungen mittheile und sind der Ansicht, dass dieselben einer Veröffentlichung werth sind.

In der That muss ich Ihnen darin beistimmen. Dieser unmittelbare Anschluss der Jacobischen Begriffe an die vieljährigen berühmten Arbeiten Legendre's über elliptische Integrale ist ebenso merkwürdig, wie natürlich und einfach. Ich kenne nur noch einen Weg, der allerdings noch einfacher zum Ziel führt, den ganzen Inhalt der Fundamente und die spätern Resultate der Forschungen Jacobi's und Abel's im Gebiet der elliptischen Functionen zu reproduciren.

Weder die Theorie der doppelt periodischen Functionen, welche nicht französiche Mathematiker, sondern Jacobi in seiner ersten Vorlesung 1829 begründet hat, noch die Transformation, wie sie in den Fundamenten behandelt und benutzt ist, noch die Multiplication, wie sie Abel und später Jacobi in seinen Vorträgen als Uebergang angewandt hat, noch die unendlichen Doppelprodukte, deren wesentlichste Schwierigkeiten Jacobi ebenfalls gekannt und in seinen Vorträgen besiegen gelehrt hat, noch die Theorie der ϑ Funktion, wie sie Jacobi in seinem grossen Vortrag 1836 zuerst als Ausgangspunkt gewählt hat, ebensowenig die auf Entwicklung noch Potenzen gegründete, oder irgend eine spätere mit den bewunderungswürdigen Riemannschen Principien in direktem Zusammenhang stehende Behandlungsweise der elliptischen Functionen, ich sage keine aller dieser an sich ausgezeichneten Behandlungsweisen ist so einfach und kurz, als die auf die elliptischen Integrale erster Gattung, im ursprünglichen z-Gebiet auf imaginären Wege genommen, und auf solche 2ter und 3ter Gattung im u-Gebiet begründete, wie ich sie vor circa 20 Jahren zum ersten Mal vorgetragen habe.

Diese würde meiner Ansicht nach für ein Lehrbuch der Theorie der elliptischen Functionen am geeignetsten sein und ich würde an die Herausgabe eines solchen, die ich mir vorbehalte, wohl schon längst herangegangen sein, wenn ich nicht bisher, leider vergebens, die längst in Aussicht gestellte Veröffentlichung der Jacobischen grössten Vorlesung hätte abwarten wollen. Obgleich nämlich die von mir befolgte Methode sich wesentlich von der in den genannten Vorlesungen befolgten unterscheidet, so habe ich doch, so lange noch vom Schöpfer der Theorie selbst etwas zu erwarten stand, Anstand genommen, meine Vorträge zu publiciren. Freilich ist die Folge davon, dass inzwischen in deutschen und französischen Lehrbüchern, deren Autoren diese Rücksicht nicht nehmen zu dürfen geglaubt haben, ein grosser Theil davon vorkommt.

Wenn ich im Folgenden, Ihrer freundlichen Aufforderung Folge leistend, jene Anwendungen der Landenschen Transformation auf die unendlichen Entwicklungen Ihnen hier mittheile, so werden Sie mit mir denselben keinen weitern Werth beilegen, als den oben angedeuteten, wonach sie die schönen Arbeiten eines der grössten französischen Mathematikers in der Theorie der elliptischen Functionen gewissermassen abschliessen. Ich entnehme die folgenden Mittheilungen theils jener ältern Vorlesung, theils der oben erwähnten spätern.

In der ersteren ist die Transformation der 2ten Ordnung lange nicht so ausführlich behandelt, als in der zweiten, wo ich die Arbeiten Legendres darüber für alle drei Gattungen vollständig mitgetheilt und auf die Functionen $Z(u)$, $\Theta(u)$ und $\Pi(u, a)$ ausgedehnt habe, bevor ich zur vorliegenden Entwicklung übergegangen bin.

Nachdem in ersterer die Landensche Transformationsformel:

$$\sin(2\varphi' - \varphi) = \varkappa \sin\varphi$$

in die Form:

$$\sin\varphi = \frac{2}{1+\varkappa} \cdot \frac{\sin\varphi' . \cos\varphi'}{\Delta(\varphi', \varkappa')},$$

und durch ihren Zusammenhang mit den Gleichungen:

$$u' = \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa')} = \frac{1+\varkappa}{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa)} = \frac{1+\varkappa}{2} u$$

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa')} = \frac{1+\varkappa}{2} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa)} = (1+\varkappa)\, K$$

$$K_{,}' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa_{,}')} = \frac{1+\varkappa}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa_{,})} = \frac{1+\varkappa}{2} K_{,}\,,$$

woraus:

$$\frac{K_{,}'}{K_{,}} = \frac{K'}{2K} = \frac{1+\varkappa}{2}$$

folgt, vermittelst der Grundformel der Theorie $\sin am\,(u + K) = \frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u}$ in die elliptische Functions-Gleichung:

$$\text{I)} \qquad \sin am\,(u, \varkappa) = \frac{K_{,}}{K_{,}'} \sin am\left(\frac{K_{,}'}{K_{,}} u, \varkappa'\right) \sin am\left(\frac{K_{,}' u}{K_{,}} + K_{,}'\ \varkappa'\right)$$

übertragen ist, wird dieselbe auf folgende Art zur Entwicklung von $\sin am\,(u, \varkappa)$ in ein unendliches Produkt benutzt.

Es ist wohl überflüssig, dass ich die Bezeichnung erläutere, deren ich mich hier bedient habe, und wonach:

$\varkappa'$ für $\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$

$\varkappa_{,}$ für $\sqrt{1 - \varkappa\varkappa}$

$\varkappa_{,}'$ für $\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa} = \sqrt{1 - \varkappa'\varkappa'}$

$\Delta(\varphi, \varkappa)$ für $\sqrt{1 - \varkappa\varkappa \sin^2\varphi}$

gesetzt ist. Der Kürze halber werde ich mich bei der Fortsetzung der Transformationsformeln, der Bezeichnungen:

$$\varkappa'' \quad \varkappa''' \quad \text{etc.} \quad \varkappa^{(n)}$$

$$\varkappa_,'' \quad \varkappa_,''' \quad \text{etc.} \quad \varkappa_,^{(n)}$$

bedienen, wo $\varkappa^{(h+1)}$ zu $\varkappa^{(h)}$ in derselben Beziehung steht, wie $\varkappa'$ zu $\varkappa$, und ebenso der Zeichen:

$$K'' \quad K''' \quad \text{etc.} \quad K^{(n)}$$

$$K_,'' \quad K_,''' \quad \text{etc.} \quad K_,^{(n)}$$

in derselben Weise. Ferner sollen:

$$\sin am\,(u,\varkappa), \quad \cos am\,(u,\varkappa), \quad \Delta\, am\,(u,\varkappa),$$

respective durch:

$$\mathrm{s}\,(u,\varkappa), \qquad \mathrm{c}\,(u,\varkappa), \qquad \Delta\,(u,\varkappa),$$

oder wo es auf die Angabe des Moduls nicht ankommt durch:

$$\mathrm{s}\;u, \qquad \mathrm{c}\;u, \qquad \Delta\;u$$

und

$$\sin am\,(u,\varkappa_,), \quad \cos am\,(u,\varkappa_,), \quad \Delta\, am\,(u,\varkappa_,)$$

durch

$$\mathrm{s}_,\;u, \qquad \mathrm{c}_,\;u, \qquad \Delta_,\;u$$

bezeichnet sein.

Wir erhalten dann durch fortgesetzte Anwendung der Formel I. die folgende:

$$s\,(u,\varkappa) = \left(\frac{K_,}{K_,'}\right)\left(\frac{K_,'}{K_,''}\right)^2 \cdots \left(\frac{K_,^{(n-1)}}{K_,^{(n)}}\right)^{2^{n-1}} \cdot \prod_{o}^{2^n-1} s\left\{\frac{K_,^{(n)}}{K_,}\,u + \frac{h\,K^{(n)}}{2^{n-1}},\ \varkappa^{(n)}\right\}$$

worin das Zeichen $\prod\limits_{o}^{m}$ die bekannte Bedeutung hat, dass es das Produkt der Werthe der dahinterstehenden Function für:

$$h = o \quad h = 1 \quad \ldots \quad h = m$$

bedeutet. — Da nun folgende Grenzwerthe bestehn, auf deren Nachweis wir später zurückkommen werden:

$$\mathrm{Lim}\ K_,^{(n)} = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Lim}\ \varkappa^{(n)} = 1$$

$$(\text{für } n = \infty) \qquad \mathrm{Lim}\ s\,(v,\varkappa^{(n)}) = \frac{e^{v} - e^{-v}}{e^{v} + e^{-v}}$$

$$\mathrm{Lim}\ \frac{K^{(n)}}{2^{n-1}} = \frac{\pi K}{K_,}$$

so erhält man nach ebenderselben Schlussweise, wie in den Fundamenten pag. 84, wenn man

$$e^{\frac{\pi K}{K_,}} = q_, \quad , \quad \frac{\pi K}{2K_,} = x_,$$

setzt, die Entwicklung:

$$\sin am\left(\frac{2K_,\,x_,}{\pi},\ \varkappa\right) = A_, \cdot \frac{e^{x_,} - e^{-x_,}}{e^{x_,} + e^{-x_,}} \cdot \prod_{o}^{\infty} \frac{\left(1 - q_,^{2h}\,e^{2x_,}\right)\left(1 - q_,^{2h}\,e^{-2x_,}\right)}{\left(1 + q_,^{2h}\,e^{2x_,}\right)\left(1 + q_,^{2h}\,e^{-2x_,}\right)}$$

wo,

$$A_, = \mathrm{Lim}\left(\frac{K_,}{K_,'}\right)\left(\frac{K_,'}{K_,''}\right)^2 \cdots \left(\frac{K_,^{(n-1)}}{K_,^{(n)}}\right)^{2^{n-1}}$$

gesetzt ist. Diesen Grenzwerth kann man vermittelst der obigen Formel:

$$\frac{K_,}{K_,'} = \frac{2}{1+\varkappa} = \frac{\varkappa_,}{\sqrt{\varkappa}} = \frac{2K}{K_,}$$

$$A_, = \mathrm{Lim}\left(\frac{\varkappa'}{\sqrt{\varkappa}}\right)\left(\frac{\varkappa''}{\sqrt{\varkappa'}}\right)^2 \cdots \left(\frac{\varkappa^{(n-1)}}{\sqrt{\varkappa^{(n-2)}}}\right)^{2^{n-2}} \cdot \left(\frac{\varkappa^{(n)}}{\sqrt{\varkappa^{(n-1)}}}\right)^{2^{n-1}}$$

$$A_, = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$$

bestimmen. Durch die Grundformel der Theorie:

$$s\,(u+K) = \frac{cu}{\Delta u}$$

wird man darauf geführt und berechtigt auf beiden Seiten der gefundenen Gleichung:

$$1)\ \sin am\left(\frac{2K_,x_,}{\pi}, \varkappa\right) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{e^{x_,} - e^{-x_,}}{e^{x_,} + e^{-x_,}} \prod_1^\infty \frac{(1-q_,^{2h} e^{2x_,})\,(1-q_,^{2h} e^{-2x_,})}{(1+q_,^{2h} e^{2x_,})\,(1+q_,^{2h} e^{-2x_,})}$$

statt: $\frac{2K_,x_,}{\pi}$ $\qquad \frac{2K_,x_,}{\pi} + K$

d. h. statt $x_,$ $\qquad x_, - \frac{1}{2}\log q_,$

zu setzen. — Auf diese Weise ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{\cos am\left(\frac{2K_,x_,}{\pi}, \varkappa\right)}{\Delta\ am\left(\frac{2K_,x_,}{\pi}, \varkappa\right)} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \prod_1^\infty \frac{(1-q_,^{2h-1} e^{2x_,})\,(1-q_,^{2h-1} e^{-2x_,})}{(1+q_,^{2h-1} e^{2x_,})\,(1+q_,^{2h-1} e^{-2x_,})}$$

Da die Functionen:

$$\cos am\left(\frac{2K_,x_,}{\pi}, \varkappa\right) = \sqrt{1 - \sin^2 am\left(\frac{2K_,x_,}{\pi}, \varkappa\right)}$$

$$\Delta\ am\left(\frac{2K_,x_,}{\pi}, \varkappa\right) = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 am\left(\frac{2K_,x_,}{\pi}, \varkappa\right)}$$

mit der Function

$$\sin am\left(\frac{2K_,x_,}{\pi}, \varkappa\right)$$

wie die oben genannten Gleichungen lehren, denselben Nenner haben, so kann man hieraus auf die beiden Formeln:

$$2)\quad \cos am\left(\frac{2K_,x_,}{\pi}\right) = \frac{2B_,}{e^{x_,} + e^{-x_,}} \cdot \prod_1^\infty \frac{(1-q_,^{2h-1} e^{2x_,})\,(1-q_,^{2h-1} e^{-2x_,})}{(1+q_,^{2h} e^{2x_,})\quad(1+q_,^{2h} e^{-2x_,})}$$

$$3)\quad \Delta\ am\left(\frac{2K_,x_,}{\pi}\right) = \frac{2B_,\sqrt{\varkappa}}{e^{x_,} + e^{-x_,}} \cdot \prod_1^\infty \frac{(1+q_,^{2h-1} e^{2x_,})\,(1+q_,^{2h-1} e^{-2x_,})}{(1+q_,^{2h} e^{2x_,})\quad(1+q_,^{2h} e^{-2x_,})}$$

schliessen, wo $B_,$ eine von $x_,$ unabhängige Grösse ist. Zur Bestimmung derselben setze ich in diesen beiden Gleichungen, und in dem nach $x_,$ genommenen Differentialquotienten der ersten $x_, = o$ um die drei Formeln:

$$\frac{2K_,}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \prod_1^\infty \left(\frac{1 - q_,^{2h}}{1 + q_,^{2h}}\right)^2$$

$$1 = B_, \quad \prod_1^\infty \left(\frac{1-q_,^{2h-1}}{1+q_,^{2h}}\right)^2$$

$$1 = B_,\sqrt{\varkappa} \prod_1^\infty \left(\frac{1+q_,^{2h-1}}{1+q_,^{2h}}\right)^2$$

zu erhalten.

Da nun die Substitution

$$x_, = -\tfrac{1}{2} \log.\ q_,$$

in der dritten der Gleichungen, die folgende:

$$\varkappa_, = 4\, B_, \sqrt{\varkappa q_,}\, .\, \prod_1^\infty \left(\frac{1+q_,^{2h}}{1+q_,^{2h-1}}\right)$$

liefert, so erhält man durch Multiplication der beiden letzten die Relation:

$$B_, = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\varkappa_,}{\varkappa}}\, \frac{1}{\sqrt[4]{q_,}}$$

Es ergeben sich hieraus die Werthe von $\varkappa, \varkappa_,, \frac{2K_,}{\pi}$ ausgedrückt durch $q_,$:

$$\sqrt{\varkappa_,} = 2 \sqrt[4]{q_,}\, \prod_1^\infty \left(\frac{1+q_,^{2h}}{1+q_,^{2h-1}}\right)^2$$

$$\sqrt{\varkappa} = \prod_1^\infty \left(\frac{1-q_,^{2h-1}}{1+q_,^{2h-1}}\right)^2$$

$$\frac{2K_,}{\pi} = \prod_1^\infty \left(\frac{1+q_,^{2h-1}}{1-q_,^{2h-1}}\right)^2 . \left(\frac{1-q_,^{2h}}{1+q_,^{2h}}\right)^2,$$

und die drei Hauptformeln:

$$\sqrt{\varkappa} \sin am \left(\frac{2K_, x_,}{\pi}, \varkappa\right) = \frac{e^{x_,} - e^{-x_,}}{e^{x_,} + e^{-x_,}}\, .\, \prod_1^\infty \frac{1-2q_,^{2h}(e^{2x_,} + e^{-2x_,}) + q_,^{4h}}{1+2q_,^{2h}(e^{2x_,} + e^{-2x_,}) + \varkappa_,^{4h}}$$

$$\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa_,}} \cos am \left(\frac{2K_, x_,}{\pi}\, \varkappa\right) = \frac{1}{2\sqrt[4]{q_,}} \cdot \frac{2}{e^{x_,} + e^{-x_,}}\, .\, \prod_1^\infty \frac{1-2q_,^{2h-1}(e^{2x_,} + e^{-2x_,}) + q_,^{4h-2}}{1+2q_,^{2h}(e^{2x_,} + e^{-2x_,}) + q_,^{4h}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varkappa_,}} \Delta\, am \left(\frac{2K_, x_,}{\pi}, \varkappa\right) = \frac{1}{2\sqrt[4]{q_,}} \cdot \frac{2}{e^{x_,} + e^{-x_,}}\, .\, \prod_1^\infty \frac{1+2q_,^{2h-1}(e^{2x_,} + e^{-2x_,}) + q_,^{4h-2}}{1+2q_,^{2h}(e^{2x_,} + e^{-2x_,}) + q_,^{4h}}$$

Setzt man in diesen statt:

$x_,$	$i x_,$
$\varkappa_,$	$\varkappa$
$\varkappa$	$\varkappa_,$
$K_,$	K
K	$K_,$

und benutzt die Grundformeln:

$$\sin am\, (iu, \varkappa_,) = i.\ \mathrm{tang}\, am\, (u, \varkappa),$$

$$\cos am\, (iu, \varkappa_,) = \frac{1}{\cos am\, (u, \varkappa)}\, ;$$

$$\Delta\ am\, (iu, \varkappa_,) = \frac{\Delta\ am\, (u, \varkappa)}{\cos am\, (u, \varkappa)}\, ,$$

so findet man auch endlich die Hauptformeln, welche in den Fundamenten pag. 88 durch die Transformation der $n$ten Ordnung gefunden sind, nämlich:

$$q = e^{\frac{-\pi K_,}{K}}$$

gesetzt:

$$\sqrt{\varkappa} \sin am \left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = 2 \sqrt[4]{q}\, .\, \sin x\, .\, \prod_1^\infty \left(\frac{1-2q^{2h} \cos 2x + q^{4h}}{1-2q^{2h-1} \cos 2x + q^{4h-2}}\right)$$

$$\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa_,}}\, .\, \cos am \left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = 2 \sqrt[4]{q} \cos x\, \prod_1^\infty \left(\frac{1+2q^{2h} \cos 2x + q^{4h}}{1-2q^{2h-1} \cos 2x + q^{4h-2}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varkappa_,}}\, .\, \Delta\ am \left(\frac{2Kx}{u}, \varkappa\right) = \prod_1^\infty \left(\frac{1+2q^{2h-1} \cos 2x + q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1} \cos 2x + q^{4h-2}}\right)$$

Ich habe im Voranstehenden mich weder auf die von Legendre in den Capiteln XVII. etc. seiner Theorie der elliptischen Functionen auseinandergesetzten Algorithmen zur Berechnung der successiven Moduln und Argumente, noch auf die genauere Begründung des Schlusses von einem endlichen n zu einem unendlich grossen eingelassen, weil beides unserm Zwecke ferner liegt. Ich will nur bemerken, dass bei der Anwendung der Landenschen Transformation mit Vergrösserung des Moduls die folgenden bekannten Grenzwerthe des Integrals erster Gattung bei beiden Fragen zuletzt in Anwendung kommen.

$$1)\qquad K = \log\frac{4}{\varkappa_,} - \frac{1}{4}\varkappa_,^2\left(1-\log\frac{4}{\varkappa_,}\right)$$

$$2)\qquad K_, = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}\varkappa^2\,.\,\varkappa^2\right),$$

$$3)\qquad u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\vartheta,\varkappa} = K\log\operatorname{tang}\frac{\pi+2\varphi}{4} - \frac{\varkappa_,^2\operatorname{tang}\varphi}{4\,.\,\cos^2\varphi}$$

deren letzte, falls $\varkappa_,$ als Grösse erster Ordnung anzusehn ist, für alle Werthe von φ, wofür

$$\varkappa_,\operatorname{tang}\varphi$$

endlich ist, bis auf Grössen dritter Ordnung, während jede der beiden erstern bis auf dieselbe Ordnung richtig ist. Wenn der Werth von φ die genannte Bedingung nicht erfüllt, so tritt statt des letzten der Grenzwerth:

$$u = K - K_,\log\operatorname{tang}\psi + \frac{\varkappa_,^2}{4}\,.\,\frac{\operatorname{tang}\psi}{\cos^2\psi}$$

wo ψ durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{1}{\varkappa_,\operatorname{tang}\varphi}$$

bestimmt wird. In der That sieht man, dass dadurch

$$u \text{ in } K - \int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta(\psi,\varkappa)}$$

übergeht, so dass einen der beiden Grössen

$$\varkappa_,\operatorname{tang}\varphi \qquad\qquad \varkappa_,\operatorname{tang}\psi$$

die obige Bedingung erfüllen muss, weil ihr Produkt $= \varkappa_,$ ist. Vermittelst dieser Grenzwerthe ist Legendre in dem Falle, dass $\varkappa$ und $\sin\varphi$ positive echte Brüche sind, zu folgendem Algorithmus gelangt, den ich hier zur direkten Berechnung der in unsern beiden Entwicklungen vorkommenden Grössen zusammenstelle.

Es sei:
$$\varkappa = \sin u = \operatorname{tang}^2\frac{\omega'}{2} \qquad \varkappa' = \operatorname{tang}^2\frac{\omega''}{2}\ \text{etc.},$$

so bilde man die Reihe von Grössen,

$$\varkappa' = \sin\omega', \quad \varkappa'' = \sin\omega'', \quad \text{etc.}.$$

Ferner sei

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)},$$

so bilde man die Reihe von Grössen:

$$\varphi',\ \varphi'',\ \text{etc.}$$

vermittelst der Formeln:

$$\sin(2\varphi'-\varphi) = \sin\omega\sin\varphi,\ \sin(2\varphi''-\varphi') = \sin\omega'\sin\varphi'$$

und die Grössen:

$$\alpha',\ \alpha'',\ \text{etc.}$$

nach denselben Formeln für:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Dann wird:

$$K_{,} = \text{Lim} \sqrt{\frac{\varkappa'\varkappa''\ldots\varkappa^{(n-1)}}{\varkappa}}\, \varkappa^{(n)} \frac{\pi}{2},$$

$$u = \text{Lim} \sqrt{\frac{\varkappa'\varkappa''\ldots\varkappa^{(n-1)}}{\varkappa}}\,.\,\varkappa^{(n)} \log \text{tang} \left(\frac{\pi+2\varphi^{(n)}}{4}\right),$$

$$K = \text{Lim} \sqrt{\frac{\varkappa'\varkappa''\ldots\varkappa^{(n-1)}}{\varkappa}}\, \varkappa^{(n)} \log \text{tang} \left(\frac{\pi+2\alpha^{(n)}}{4}\right),$$

oder auch:

$$K = \sqrt{\frac{\varkappa'\varkappa''\ldots\varkappa^{(n-1)}}{\varkappa}}\,.\,\frac{\varkappa^{(n)}}{2^n} \log \frac{4}{\varkappa_{,}^{(n)}},$$

$$u = \frac{2^n K}{\log \frac{4}{\varkappa_{,}^{(n)}}} \log \text{tang} \left(\frac{\pi+2\varphi^{(n)}}{4}\right),$$

$$\log q_{,} = \frac{1}{2^{n-1}} \log \frac{\varkappa_{,}^{(n)}}{4},$$

$$\log q = \frac{\pi^2}{\log q_{,}},$$

woraus die oben benutzten Grenzwerthe, namentlich:

$$\frac{\pi K}{K_{,}} = \text{Lim} \frac{1}{2^{n-1}} \log \frac{4}{\varkappa_{,}^{n}} = \text{Lim} \frac{K^n}{2^{n-1}}$$

hervorgehen.

Wenn Legendre auch daran gedacht hat, wie der Werth von φ aus dem gegebenen von u zu berechnen sei, indem er dazu die zur successiven Berechnung von $\varphi^{(n)}\ \varphi^{(n-1)} \ldots \varphi$ geeigneten Formeln:

$$\log \frac{\pi+2\varphi^{(n)}}{4} = \frac{u}{2^n K} \log \frac{4}{\varkappa_{,}^{(n)}},$$

$$\text{tang}\,(\varphi^{(n-1)} - \varphi^{(n)}) = \varkappa_{,}^{(n)} \text{ tang } \varphi^{(n)},$$

$$\text{tang}\,(\varphi^{(n-2)} - \varphi^{(n-1)}) = \varkappa_{,}^{(n-1)} \text{ tang } \varphi^{(n-1)},$$

etc.

$$\text{tang}\,(\varphi - \varphi') = \varkappa_{,}' \text{ tang } \varphi'$$

angiebt, so wird durch unsre Entwicklungen dies überflüssig gemacht. —

Ebenso wie die Transformation von Landen, von Legendre mit grösser werdenden Moduln behandelt ist, hat er auch die umgekehrte für den Fall benutzt, dass:

$$\varkappa^2 < 1/2$$

ist. Es sind dazu dieselben Formeln für die Complemente der successive verkleinerten Moduln:

$$\varkappa_{,} \quad \varkappa_{,}^{0} \quad \varkappa_{,}^{00} \quad \text{etc.}$$

$$\varkappa_{,} = \sin v = \text{tang}^2 \frac{v^0}{2},\ \varkappa_{,}^{0} = \sin v^0 = \text{tang}^2 \frac{v^{00}}{2} \text{ etc.}$$

so wie die für die Argumente:

$$\varphi^0 \quad \varphi^{00} \quad \text{etc.}$$

$\text{tang}\,(\varphi^0 - \varphi) = \sin v \text{ tang } \varphi$, $\text{tang}\,(\varphi^{00} - \varphi^0) = \sin v^0 \text{ tang } \varphi^0$, etc.,
und ferner:

$$K = \operatorname{Lim} \sqrt{\frac{\varkappa_{,}^{0}\varkappa_{,}^{00}\ldots\varkappa_{,}^{(n-1)0}}{4}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$K_{,} = \operatorname{Lim} \sqrt{\frac{\varkappa_{,}^{0}\varkappa_{,}^{00}\ldots\varkappa_{,}^{(n-1)0}}{\varkappa_{,}}} \cdot \frac{\varkappa_{,}^{n.0}}{2^{n}} \cdot \operatorname{tang} \frac{4}{\varkappa^{n.0}}$$

$$\log q = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \log \frac{\varkappa^{n.0}}{4}$$

$$\log q_{,} = \frac{\pi^{2}}{\log q}$$

anzuwenden. Dagegen ist diese umgekehrte Transformation nicht ebenso zum Uebergang in die Theorie der elliptischen Functionen geeignet, wohl aber eine andre, welche ebenfalls von Legendre zuerst angegeben zu sein scheint und erst viel später von Gauss in der Abhandlung determinatio attractionis weiter verfolgt ist. Ich meine die aus der Landenschen Transformation dadurch abgeleitete, dass:

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tang} X \,.\, \Delta(X, \varkappa)$$

gesetzt wird.

Man erhält dann als Resultat der Elimination von φ aus dieser Gleichung und der Landenschen Transformations - Gleichung:

$$\operatorname{tang}(\varphi - \varphi') = \varkappa_{,}' \operatorname{tang} \varphi'$$

$$\operatorname{tang} \varphi' = \frac{(1+\varkappa) \operatorname{tang} X}{\sqrt{1-\varkappa^{2}\sin^{2}X}} \,.$$

Setzt man darin für:

φ'	φ
X	$\varphi^{(2)}$
$\varkappa'$	$\varkappa$
$\varkappa$	$\varkappa^{0}$,

so geht dieselbe in die Formel:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{(1+\varkappa^{0}) \operatorname{tang} \varphi^{(2)}}{\Delta(\varphi^{(2)}, \varkappa^{0})}$$

über, wie sie in den Fundamenten pag. 96 ähnlich bezeichnet ist. Sie führt durch die Gleichungen

$$u = \int_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)} = (1+\varkappa^{0}) \int_{0}^{\varphi^{(2)}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa^{0})} = (1+\varkappa^{0})\, u^{(2)}$$

$$K = \int_{0}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)} = (1+\varkappa^{0}) \int_{0}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa^{0})} = (1+\varkappa^{0})\, K^{0},$$

auf die Formeln:

$$u^{(2)} = \frac{K^{0}}{K} \,.\, u$$

$$\operatorname{tang} am\,(u, \varkappa) = \frac{K}{K^{0}} \cdot \frac{\operatorname{tang} am\left(\frac{K^{0}}{K}\, u,\, \varkappa^{0}\right)}{\Delta\, am\left(\frac{K^{0}}{K}\, u,\, \varkappa^{0}\right)},$$

oder mit Benutzung der fundamentalen Formel (fund. pag. 35):

$$\operatorname{tang} am\,(u + iK_{,}) = \frac{i}{\Delta\, am\, u}$$

auf die zur Fortsetzung geeignete Formel:

$$\operatorname{tang} am\,(u, \varkappa) = -\, i \operatorname{tang} am\left(\frac{K^{0}}{K}\, u,\, \varkappa^{0}\right) \operatorname{tang} am\left(\frac{K^{0}}{K}\, u + i K_{,}^{0},\, \varkappa^{0}\right)$$

Die Ausführung dieser Entwicklung steht mit der in den Fundamenten (pag. 85) benutzten Anwendung der Transformation $n$ter Ordnung in grösserer Uebereinstimmung, folgt jedoch geradezu aus unsrer obigen vermittelst der schon oben dazu benutzten Grundformeln.

Der von Legendre so eben angeführte Uebergang von der Landenschen Transformation zu der Gaussischen kommt, in die Analysis der elliptischen Funktionen übersetzt, darauf hinaus, dass, da:

$$\varphi = (am\ u,\ \varkappa)$$

$$\varphi' = am\left(\frac{K'u}{2K},\ \varkappa'\right)$$

gesetzt werden konnte, jetzt:

$$X = am\left(\frac{u}{2},\ \varkappa\right)$$

gesetzt werden muss. Denn man hat, wie bekannt, die aus dem Additionstheoren leicht sich ergebende Formel

$$\text{tang}\ \frac{am\ 2u}{2} = \text{tang}\ am\ u\ .\ \Delta\ am\ u.$$

Es besteht also der analytische Charakter dieser Transformation darin, dass in ihr Relationen zwischen:

$$am\,(u, \varkappa)\ \text{und}\ am\left(\frac{K'}{K}\ u,\ \varkappa'\right)$$

(oder was dasselbe) ist zwischen:

$$am\left(\frac{K^0}{K}\ u_,\ ,\ \varkappa^0\right),\ \text{und}\ am\ (u_,\ ,\ \varkappa)$$

dargestellt werden, während die ursprüngliche auf solchen Relationen zwischen:

$$am\ (u,\ \varkappa)\ \text{und}\ am\ \left(\frac{K'}{2K}\ u\ ,\ \varkappa'\right)$$

beruhte. In der That ist die Form der eben gefundenen Transformations-Gleichung von dieser Natur, und es kann hienach jede Formel der Landenschen Transformation in eine analoge dieser neuen, vermittelst der Formeln für die Verdopplung der elliptischen Functionen übertragen werden.

Ich pflege jedoch die weit einfachere Uebertragungsart vermittelst der fundamentalen Formeln in meinen Vorlesungen vorzutragen, die ich Ihnen, verehrter Herr College, wohl nicht näher hier mittheilen darf.

Ich gehe jetzt zu dem Inhalte meiner spätern oben genannten Vorträge, insofern er ähnliche Anwendungen der Landenschen Transformation betrifft, über. Darin wird die Entwicklung in unendliche Produkte für jede der drei Functionen:

$$\sin\ am\ u,\quad \cos\ am\ u,\quad \Delta\ am\ u$$

einzeln durchgeführt, indem in der That bei genauerer Ueberlegung einleuchtet, wie man zur Trennung des Zählers und Nenners der Funktion:

$$\sin\ am\ (K + u,\ \varkappa)$$

nur dann berechtigt ist, wenn man sich auf diese principiellen Eigenschaften der elliptischen Functionen stützt, nämlich auf die Art, Anzahl und Ordnung des Verschwindens ihrer selbst und der zu ihnen reciproken Funktionen.

Ausserdem aber habe ich darin die Zerlegung sämmtlicher 12 Funktionen:

$$\begin{array}{ccc}
\sin\ am\ u & \cos\ am\ u & \Delta\ am\ u \\[4pt]
\dfrac{1}{\sin\ am\ u} & \dfrac{\Delta\ am\ u}{\sin\ am\ u} & \dfrac{\cos\ am\ u}{\sin\ am\ u} \\[8pt]
\dfrac{\cos\ am\ u}{\Delta\ am\ u} & \dfrac{\sin\ am\ u}{\Delta\ am\ u} & \dfrac{1}{\Delta\ am\ u} \\[8pt]
\dfrac{\Delta\ am\ u}{\cos\ am\ u} & \dfrac{1}{\cos\ am\ u} & \dfrac{\sin\ am\ u}{\cos\ am\ u}
\end{array}$$

in stets convergirende Reihen von Partialbrüchen aus der Landenschen Transformation abgeleitet.

Ich bin hiebei von folgenden drei zur Landenschen Transformation gehörigen Formeln ausgegangen:

$$\text{V.}\quad \left\{\begin{aligned} \sin\varphi &= (1+\varkappa_,') \cdot \frac{\sin\varphi' \cdot \cos\varphi'}{\varDelta(\varphi_,' \varkappa')} \\ \cos\varphi &= \frac{1-(1+\varkappa_,')\sin^2\varphi'}{\varDelta(\varphi' \varkappa')} \\ \varDelta(\varphi,\varkappa) &= \frac{1-(1-\varkappa_,')\sin^2\varphi'}{\varDelta(\varphi' \varkappa')}, \end{aligned}\right.$$

von denen die letztern beiden eine Folge der erstern sind. Aus ihnen ergeben sich sofort die analogen in Form elliptischer Functionen:

$$\text{VI.}\quad \left.\begin{aligned} \sin am(u,\varkappa) &= \frac{K_,}{K_,'} \sin am\left(\frac{K_,'u}{K_,}\right) \sin am\left(\frac{K_,'}{K} u + K'\right) \\ \cos am(u,\varkappa) &= \left(1 - \frac{\sin^2 am\left(\frac{K_,'}{K_,}u\right)}{\sin^2 am\left(\frac{K'}{2}\right)}\right) \cdot \frac{1}{\varDelta\, am\left(\frac{K_,'}{K_,}u\right)} \\ \varDelta\, am(u,\varkappa) &= \frac{1-\varkappa'^2 \sin^2 am\left(\frac{K'}{2}\right) \sin^2 am\left(\frac{K_,'}{K_,}u\right)}{\varDelta\, am\left(\frac{K_,'}{K_,}u\right)} \end{aligned}\right\} \pmod{\varkappa'}$$

deren letztere beide man auch aus der ersteren durch Betrachtung derjenigen Werthe von $\frac{K_,'}{K_,} u, \varkappa'$ ableiten kann, wofür $\cos am\, u, \varkappa$ und $\varDelta\, am\, u, \varkappa$ verschwinden. Auf dieselbe Weise findet man die Formel:

$$\text{VII.}\quad 1 - \frac{s^2(u,\varkappa)}{s^2(a,\varkappa)} = \frac{\left(1 - \dfrac{s^2\frac{K_,'}{K_,}u}{s^2\frac{K_,'}{K_,}a}\right)\left(1 - \dfrac{s^2\frac{K_,'}{K_,}u}{s^2\left(\frac{K_,'}{K_,}a+K'\right)}\right)}{\varDelta^2 \frac{K_,'}{K_,}u} \pmod{\varkappa'},$$

welche auch direkt aus der trigonometrischen Formel:

$$1 - \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha} = \frac{\left(1 - \frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\alpha'}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\varphi'}{\cos^2\alpha'} \cdot \varDelta^2\alpha'\right)}{\varDelta^2\varphi'}$$

folgt, worin α' aus α ebenso entstanden gedacht wird, wie φ' aus φ.

Setzt man in Formel VII für a: $a+iK_,$, so nimmt sie die Gestalt an:

$$\text{VIII.}\quad 1-\varkappa^2 s^2 a s^2 u = \frac{\left(1-\varkappa'\varkappa' s^2\left(\frac{K_,'}{K_,}a\right)s^2\left(\frac{K_,'}{K_,}u\right)\right)\left(1-\varkappa'\varkappa' s^2\left(\frac{K_,'}{K_,}u+K'\right)s^2\left(\frac{K_,'}{K_,}u\right)\right)}{\varDelta^2\left(\frac{K_,'}{K_,}u\right)} \pmod{\varkappa'},$$

so dass auch die Gleichung stattfindet:

$$\text{IX.}\quad \frac{1-\varkappa^2 s^2 a s^2 u}{1-\varkappa^2 s^2 b s^2 u} = \frac{(1-\varkappa'\varkappa' s^2 a' s^2 u')\,(1-\varkappa'\varkappa' s^2(a'+K')s^2 u')}{(1-\varkappa'\varkappa' s^2 b' s^2 u')\,(1-\varkappa'\varkappa' s^2(b'+K')s^2 u')},$$

wo:

$$\frac{K_,'}{K_,} u = u', \quad \frac{K_,'}{K_,} a = a' \quad \frac{K_,'}{K_,} b = b'$$

gesetzt ist.

Mit Hülfe dieser Formeln kann man nun die Formeln VI leicht fortsetzen, nach dem man sie so geschrieben hat:

$$\frac{K_,'}{K_,} s(u,\varkappa) = s u' s(u'+K'),$$

$$c(u,\varkappa) = \frac{1-\varkappa'\varkappa' s^2\left(\frac{K'}{2} + i K_,'\right) s^2 u'}{\varDelta u'},$$

$$\varDelta(u,\varkappa) = \frac{1-\varkappa'\varkappa' s^2 \frac{K'}{2} s^2 u'}{\varDelta u'},$$

und gelangt mit Hinzuziehung der Formel:

$$s(u+v)\,.\,s(u-v) = \frac{s^2u - s^2v}{1-k^2s^2us^2v}$$

zu den 3 Transformationsformeln der Ordnung 2^n:

$$\text{X.}\qquad \frac{K_,^{(n)}}{K_,}\,.\,s(u,\varkappa) = s\,u^{(n)}\,.\,s(u^{(n)} + K^{(n)})\,.\,\prod_{0}^{2^{n-1}-1}\,.\,\frac{1-\varkappa(n)\,\varkappa(n)\,.\,s^2\left(\frac{2h}{2^n}\,.\,K^{(n)} + iK_,^{(n)}\right)s^2u(n)}{1-\varkappa(n)\,\varkappa(n)\,s^2\left(\frac{2h}{2^n}\,K^{(n)}\right)s^2u(n)},$$

$$\text{XI.}\qquad c(u,\varkappa) = \frac{1}{\Delta u^{(n)}}\,.\,\prod_{0}^{2^{n-1}-1}\frac{1-\varkappa(n)\,\varkappa(n)\,s^2\left(\frac{(2h+1)K^{(n)}}{2^n} + iK_,^{(n)}\right)s^2u(n)}{1-\varkappa(n)\,\varkappa(n)\,s^2\,\frac{2h\,K^{(n)}}{2^n}\,.\,s^2u(n)},$$

$$\text{XII.}\qquad \Delta(u,\varkappa) = \frac{1}{\Delta u^{(n)}}\,.\,\prod_{0}^{2^{n-1}-1}\frac{1-\varkappa(n)\,\varkappa(n)\,s^2\,\frac{(2h+1)K^{(n)}}{2^n}\,.\,s^2u(n)}{1-\varkappa(n)\,\varkappa(n)\,s^2\,\frac{2h\,K^{(n)}}{2^n}\,s^2u(n)},$$

$$(\text{mod } \varkappa(n))$$

worin $u(n)$ für $\frac{K_,^{(n)}}{K_,}\,u$ der Kürze halber geschrieben ist.

Setzt man hierin $n = \infty$, so erhält man die obigen unendlichen Produkte.

Dagegen gelangt man durch Zerlegung in Partialbrüche dieser drei Formeln X. XI. XII. oder ähnlich wie es in den Fundamenten pag. 47 etc. bei der Transformation von ungerader Ordnung gemacht ist, zu den Formeln, welche für $n = \infty$ die Zerlegung der Functionen $su, cu, \Delta u$ in eine stets convergente Reihe von Partialbrüchen liefern.

Man erhält dasselbe aber auch direkt aus der Landenschen Transformation, denn die beiden letzten Formeln in VI. liefern sofort, wenn man für

$$1 - \frac{s^2u'}{s^2\frac{K'}{2}} = 1 - \varkappa^2 s^2\left(\frac{K'}{2} + iK_,'\right)\,.\,s^2\,u' = c^2\left(\frac{K'}{2} + iK_,'\right) + s^2\left(\frac{K'}{2} + iK_,'\right)\Delta^2u',$$

und für:

$$1 - \varkappa'^2 s^2\frac{K'}{2}\,.\,s^2\frac{u'}{2} = c^2\,\frac{K'}{2} + s^2\frac{K'}{2}\,\Delta^2u'$$

schreibt, die folgenden:

$$\text{XIII.}\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{K_,}{K_,'}\,.\,\Delta(u,\varkappa) = \Delta(u',\varkappa') + \Delta(u'+K',\varkappa'),\\ &\frac{\varkappa K_,}{K_,'}\,.\,c(u,\varkappa) = \Delta(u',\varkappa') - \Delta(u'+K',\varkappa').\end{aligned}\right.$$

Ferner liefert die letzte der Formeln VI. logarithmisch differentiirt, die Formel:

$$\frac{K_,}{K_,'}\,\varkappa^2\,\frac{s(u,\varkappa)c(u,\varkappa)}{\Delta(u,\varkappa)} = \frac{2\varkappa'\varkappa'\,s^2\,\frac{K'}{2}\,.\,su'\,cu'\,\Delta u'}{c^2\frac{K'}{2} + s^2\frac{K'}{2}\Delta^2u'} - \frac{\varkappa'\varkappa'\,su'\,cu'}{\Delta u'}.$$

$$(\text{mod } \varkappa')$$

Wenn man hierin alle obern Indices um eins vermehrt, so erhält man nach leichter Reduktion:

$$\frac{K_,'}{K_,''}\,\varkappa'\varkappa'\,.\,\frac{s(u',\varkappa')c(u',\varkappa')}{\Delta(u_,',\varkappa')} = -\,\varkappa''\varkappa''\,su''\,s(u''+K'')\left\{1 - \frac{2s^2\frac{K''}{2}\,.\,\Delta^2u''}{1-\varkappa''\varkappa''\,s^2\,\frac{K''}{2}\,s^2u''}\right\}.$$

$$(\text{mod } \varkappa'')$$

Da nun:

$$\frac{\varkappa' \varkappa'}{\varkappa} = \frac{K_, K_,}{K_,' K_,'},$$

und

$$s\,(u,\varkappa) = \frac{K_,}{K_,'} \cdot \frac{s\,(u'\varkappa')\; c\,(u'\varkappa')}{\Delta\,(u'\varkappa')}$$

ist, so leiten wir aus der letzten Gleichung die folgende ab:

XIV.

$$\frac{\varkappa K_, K_,}{K_,' K_,''} s\,(u,\varkappa) - \frac{\varkappa'' \varkappa'' su'' cu'' \Delta u''}{1 - \varkappa'' \varkappa'' s^2 u''} + \frac{2\varkappa'' \varkappa'' s^2 \frac{K''}{2}\; su'' cu'' \Delta u''}{1 - \varkappa'' \varkappa'' s^2 \frac{K''}{2} \cdot s^2 u''}.$$

(mod $\varkappa''$)

Um diese Formel fortsetzen zu können, ist es nur nöthig die Gleichung VIII. logarithmisch zu differentiiren, wodurch man nach der frühern Bezeichnung,

XIV.

$$\frac{K_,}{K_,'} \frac{\varkappa^2 s^2 a\; su\; cu\; \Delta u}{1 - \varkappa \varkappa s^2 a\; s^2 u} = \frac{\varkappa' \varkappa' s^2 a' su' cu' \Delta u'}{1 - \varkappa' \varkappa' s^2 a' s^2 u'} + \frac{\varkappa' \varkappa' s^2 (a' + K') su' cu' \Delta u'}{1 - \varkappa' \varkappa' s^2 (a' + K') s^2 u'}$$
$$- \frac{\varkappa' \varkappa' su' cu' \Delta u'}{\Delta^2 u'}$$

erhält.

Wenn man hierin $a = K$ setzt, so ergiebt sich, da dann:

$$a' = \frac{K_,' K}{K_,} = \frac{K'}{2}$$

wird, die Specialformel:

XIV'.

$$\frac{\varkappa^2 su\; cu\; \Delta u}{1 - \varkappa^2 s^2 u} = \frac{2\varkappa' \varkappa' s^2 \frac{K'}{2} \cdot su' cu' \Delta u'}{1 - \varkappa' \varkappa' s^2 \frac{K'}{2}\; s^2 u'} - \frac{\varkappa' \varkappa' su' cu' \Delta u'}{\Delta^2 u'}.$$

Durch Vermittlung dieser Formeln ist man auch im Stande die erste der 3 Formeln VI. fortzusetzen und gelangt so, mit Benutzung der Formel:

$$\Delta\,(u+v) + \Delta\,(u-v) = \frac{2\,\Delta u\, \Delta v}{1 - \varkappa^2 s^2 u s^2 v}$$

zu den Transformationsformeln der Ordnung 2^n in folgender einfacher Gestalt:

XV.

$$\frac{\varkappa K_,}{K_,^{(n)}}\; s(u,\varkappa) =$$

$$\varkappa(n) \varkappa(n)\; \frac{su(n)\, cu(n)}{\Delta u(n)} \cdot \left\{ 1 + \sum_{1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{s^2 \frac{(2h-1) K^{(n)}}{2^{n-1}} \cdot \Delta^2 u(n)}{1 - \varkappa n \varkappa n s^2\; \frac{(2h-1) K^{(n)}}{2^{n-1}} \cdot \Delta^2 u(n)} - \frac{s^2 \frac{2h K^{(n)}}{2^{n-1}} \Delta^2 u(n)}{1 - \varkappa(n) \varkappa(n) s^2\; \frac{2h K^{(n)}}{2^{n-1}} \cdot s^2 u(n)} \right) \right\},$$

XVI.

$$\frac{K_, \varkappa}{K_,^{(n)}}\; c(u,\varkappa) =$$

$$\Delta u(n) - \frac{\varkappa_,(n)}{\Delta u(n)} + 2 \sum_{1}^{2^{n-2}-1} (-1)^h \frac{\cdot\, \Delta \frac{2h K^{(n)}}{2^{(n)}}\, \Delta u(n)}{1 - \varkappa(n) \varkappa(n)\, s^2 \frac{2h K^{(n)}}{2^{(n)}}\;\; s^2 u(n)},$$

XVII.

$$\frac{K_,}{K_,^{(n)}} \cdot \Delta\,(u,\varkappa) =$$

$$\Delta u(n) + \frac{\varkappa'(n)}{\Delta u(n)} + 2 \sum_{1}^{2^{n-2}-1} \frac{\Delta \frac{2h K^{(n)}}{2^n} \cdot \Delta u(n)}{1 - \varkappa(n) \varkappa(n)\, s^2\, \frac{2h K^{(n)}}{2^n}\;\; s^2 u(n)}.$$

Die erste dieser Hauptformeln deren Auffindung die auch von Ihnen angedeuteten Umstände erfordert hat, habe ich ursprünglich weit einfacher aus der Gleichung XII. abgeleitet. Setzt man nämlich in derselben statt n $n-1$ und vermehrt dann alle obern Indices um 1, so ergiebt sich die Gleichung

$$\Delta(u_,'\varkappa') = \frac{1}{\Delta u^{(n)}} \cdot \prod_{0}^{2^{n-2}-1} \frac{1-\varkappa^{(n)}\varkappa^{(n)} s^2\left(\frac{2h+1}{2^{n-1}} \cdot K^{(n)}\right) s^2 u^{(n)}}{1-\varkappa^{(n)}\varkappa^{(n)} s^2 \frac{2hK^{(n)}}{2^{n-1}} s^2 u^{(n)}},$$

$$(\mathrm{mod}\ \varkappa^n)$$

in welcher man auch auf der rechten Seite schreiben kann:

$$\Delta(u_,'\varkappa') = \Delta u^{(n)} \cdot \prod_{1}^{2^{n-2}} \frac{1-\varkappa^{(n)}\varkappa^{(n)} s^2\left(\frac{2h-1}{2^{n-1}} K^{(n)}\right) s^2 u^{(n)}}{1-\varkappa^{(n)}\varkappa^{(n)} s^2 \frac{2hK^{(n)}}{2^{(n)}} s^2 u^{(n)}}.$$

Die logarithmische Differentiation derselben nach u' giebt dann mit Hinzuziehung der Formeln:

$$s(u,\varkappa) = -\frac{K_,}{\varkappa K_,'} \cdot \frac{d\log\Delta(u',\varkappa')}{du'} \qquad \frac{du^{(n)}}{du'} = \frac{K_,^{(n)}}{K_,'}$$

die Formel XV.

Bevor ich in diesen Formeln $n=\infty$ setze, will ich noch zwei Formeln, zur Landenschen Transformation gehörig, aufstellen, welche bei der zweiten und dritten Gattung eben solche Anwendungen finden.

Die eine dieser Formeln entsteht durch Quadrirung der Gleichung:

$$\frac{K_,}{K_,'} \Delta(u,\varkappa) = \Delta(u'\varkappa') + \Delta(u'+K',\varkappa')$$

XVIII. $$\frac{K_, K_,}{K_,' K_,'} \Delta^2(u,\varkappa) = \Delta^2(u'\varkappa') + \Delta^2(u'+K',\varkappa') + 2\varkappa_,'.$$

Die andre folgt aus VIII., und giebt:

XIX. $$\frac{1}{1-\varkappa^2 s^2 a s^2 u} = \frac{c^2 a'}{s^2(a'+K') - s^2 a'} \cdot \frac{1}{1-\varkappa'\varkappa' s^2 a' s^2 u'}$$
$$+ \frac{c^2(a'+K')}{s^2 a' - s^2(a'+K')} \cdot \frac{1}{1-\varkappa'\varkappa' s^2(a'+K') s^2 u}.$$

Die geschickte Anwendung dieser beiden Formeln führt zu Resultaten, welche ich Ihnen gelegentlich mitzutheilen bereit bin.

Ich eile nun zum Schluss. Man kann aus den Gleichungen XV. XVI. XVII. 9 andere ableiten, indem man respektive:

für u: $\quad u+K$

$u+iK_,$

$u+K+iK_,$

setzt. Es geht durch diese Substitution respektive:

$u^{(n)}$ in: $\quad u^{(n)}+\frac{K^{(n)}}{2n}$,

$u^{(n)}+iK_,^{(n)}$,

$u^{(n)}+\frac{K^{(n)}}{2^n}+iK_,^{(n)}$,

über, und man erhält daher leicht die analogen Formeln für:

$$\frac{1}{\Delta(u,\varkappa)} \qquad \frac{s(u,\varkappa)}{\Delta(u,\varkappa)} \qquad \frac{c(u,\varkappa)}{\Delta(u,\varkappa)},$$

$$\frac{c(u,\varkappa)}{s(u,\varkappa)} \qquad \frac{\Delta(u,\varkappa)}{s(u,\varkappa)} \qquad \frac{1}{s(u,\varkappa)},$$

$$\frac{s(u,\varkappa)}{c(u,\varkappa)} \qquad \frac{1}{c(u,\varkappa)} \qquad \frac{\Delta(u,\varkappa)}{c(u,\varkappa)},$$

d. h. die Transformations-Formeln dieser 9 Funktionen von der Ordnung 2^n in Form von Partialbrüchen. Setzt man in allen diesen 12 Formeln $n = \infty$ und benutzt die eben dafür gegebenen Bezeichnungen und Schlüsse, so gelangt man zu der Entwicklung jener Functionen in unendliche Reihen von Partialbrüchen, woraus dann alle Reihenentwicklungen sofort folgen. Setzt man also der Kürze halber:

$$u^{(n)} = x,$$

so wird:

$$u = \frac{2K_{,}x_{,}}{\pi}$$

$$\text{Lim}\,(\Delta\, u_{,}^{(n)}\varkappa^{(n)}) = \frac{2}{e^{x_{,}} + e^{-x_{,}}}$$

$$\text{Lim}\,(c\, u_{,}^{(n)}\varkappa^{(n)}) = \frac{2}{e^{x_{,}} + e^{-x_{,}}}$$

$$\text{Lim}\,\frac{\varkappa^{(n)}\varkappa^{(n)}\, s(u^{(n)},\varkappa^{(n)})\,.\,c(u^{(n)},\varkappa^{(n)})}{\Delta\,(u^{(n)},\varkappa^{(n)})} = \frac{e^{x_{,}} - e^{-x_{,}}}{e^{x_{,}} + e^{-x_{,}}}$$

$$\text{Lim}\,\frac{2^{(n)}K}{K^{(n)}} = \text{Lim}\,\frac{K_{,}}{K_{,}^{(n)}} = \frac{2K_{,}}{\pi}$$

$$\text{Lim}\,\varkappa_{,}^{(n)} = o$$

$$q_{,} = e^{-\frac{\pi K}{K_{,}}},$$

und daher:

$$1)\quad \frac{2\varkappa K_{,}}{\pi}\, s\left(\frac{2K_{,}x_{,}}{\pi},\varkappa\right) = \frac{e^{x_{,}} - e^{-x_{,}}}{e^{x_{,}} + e^{-x_{,}}} + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^h \,.\left\{\frac{q_{,}^h e^{x_{,}}}{q_{,}^h e^{x_{,}} + q_{,}^{-h} e^{-x_{,}}} - \frac{q_{,}^h e^{-x_{,}}}{q_{,}^h e^{-x_{,}} + q_{,}^{-h} e^{x_{,}}}\right\},$$

$$2)\quad \frac{2\varkappa K_{,}}{\pi}\, c\left(\frac{2K_{,}x_{,}}{\pi},\varkappa\right) = \frac{2}{e^{x_{,}} + e^{-x_{,}}} + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^h \left\{\frac{1}{q_{,}^h e^{x_{,}} + q_{,}^{-h} e^{-x_{,}}} + \frac{1}{q_{,}^h e^{-x_{,}} + q_{,}^{-h} e^{x_{,}}}\right\},$$

$$3)\quad \frac{2K_{,}}{\pi}.\,\Delta\left(\frac{2K_{,}x_{,}}{\pi},\varkappa\right) = \frac{2}{e^{x_{,}} + e^{-x_{,}}} + 2\sum_{1}^{\infty} \left\{\frac{1}{q_{,}^h e^{x_{,}} + q_{,}^{-h} e^{-x_{,}}} + \frac{1}{q_{,}^h e^{-x_{,}} + q_{,}^{-h} e^{x_{,}}}\right\}.$$

Setzt man hierin für $x_{,}$ $\quad x_{,} - \frac{1}{2}\log q_{,}$, so wird:

$$4)\quad \frac{2\varkappa K_{,}}{\pi}\,\frac{c\left(\frac{2K_{,}x_{,}}{\pi},\varkappa\right)}{\Delta\left(\frac{2K_{,}x}{\pi},\varkappa\right)} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^h \,.\left\{\frac{q_{,}^{\frac{2h-1}{2}} e^{x}}{q_{,}^{\frac{2h-1}{2}} e^{x} + q_{,}^{\frac{-2h-1}{2}} e^{-x}} + \frac{q_{,}^{\frac{2h-1}{2}} e^{-x}}{q_{,}^{\frac{2h-1}{2}} e^{-x} + q_{,}^{\frac{2h-1}{2}} e^{x}}\right\},$$

$$5)\quad \frac{2\varkappa\varkappa_{,}K_{,}}{\pi}\,\frac{s\left(\frac{2K_{,}x}{\pi},\varkappa\right)}{\Delta\left(\frac{2K_{,}x}{\pi},\varkappa\right)} = 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^h \,.\left\{\frac{1}{q_{,}^{\frac{2h-1}{1}} e^{x} + q_{,}^{\frac{2h-1}{2}} e^{-x}} - \frac{1}{q_{,}^{\frac{2h-1}{2}} e^{-x} + q_{,}^{\frac{2h-1}{2}} e^{x}}\right\},$$

$$6)\quad \frac{2\varkappa_{,}K_{,}}{\pi}\,.\,\frac{1}{\Delta\left(\frac{2K_{,}x}{\pi},\varkappa\right)} = 2\sum_{1}^{\infty}\left\{\frac{1}{q_{,}^{\frac{2h\cdot 1}{2}} e^{x} + q_{,}^{\frac{-2h-1}{2}} e^{-x}} + \frac{1}{q_{,}^{\frac{2h-1}{2}} e^{-x} + q_{,}^{\frac{2h-1}{2}} e^{x}}\right\}.$$

Setzt man rechts für $x_,$: $\quad x_, + \frac{i\pi}{2}$ so werden in diesen 6 Gleichungen links die Funktionen:

$$7)\ \frac{2K_,}{\pi} \cdot \frac{1}{s\left(\frac{2K_,x}{\pi}, \varkappa\right)}$$

$$8)\ \frac{2K_,}{\pi} \cdot \frac{\Delta\left(\frac{2K_,x}{\pi}, \varkappa\right)}{s\left(\frac{2K_,x}{\pi}, \varkappa\right)}$$

$$9)\ \frac{2K_,}{\pi} \cdot \frac{c\left(\frac{2K_,x}{\pi}, \varkappa\right)}{s\left(\frac{2K_,x}{\pi}, \varkappa\right)}$$

$$10)\ \frac{2K_,}{\pi} \cdot \frac{\Delta\left(\frac{2K_,x}{\pi}, \varkappa\right)}{c\left(\frac{2K_,x}{\pi}, \varkappa\right)}$$

$$11)\ \frac{2\varkappa_,K_,}{\pi} \cdot \frac{1}{c\left(\frac{2K_,x}{\pi}, \varkappa\right)}$$

$$12)\ \frac{2\varkappa_,K_,}{\pi} \cdot \frac{s\left(\frac{2K_,x}{\pi}, \varkappa\right)}{c\left(\frac{2K_,x}{\pi}, \varkappa\right)}$$

zu setzen sein.

Setzt man in denselben 6 ersten Formeln

für $x_,$ $\quad ix$

benutzt die Formeln für imaginäre Argumente

$$s(iu, \varkappa) = i\,\frac{s(u, \varkappa_,)}{c(u, \varkappa_,)},$$

etc.

und setzt für:

$$\varkappa_, \qquad \varkappa, \qquad \varkappa \qquad \varkappa_, , \qquad q_, \qquad q = e^{\frac{-\pi K_,}{K}}, \quad K_, \qquad K,$$

so gelangt man zu den Formeln:

$$1')\ \frac{2\varkappa_,K}{\pi} \cdot \operatorname{tang}\ am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = \operatorname{tang} x + 4\sum_1^{\infty}(-1)^h \cdot \frac{q^{2h}\sin x}{1 + q^{2h}\cos 2x + q^{4h}}$$

$$2')\ \frac{2\varkappa_,K}{\pi} \cdot \sec\ am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = \sec x + 4\sum_1^{\infty}(-1)^h \cdot \frac{q^h(1 + q^{2h})\cos x}{1 + 2q^{2h}\cos 2x + q^{4h}}$$

$$3')\ \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{\Delta\ am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)}{\cos\ am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)} = \sec x + 4\sum_1^{\infty}\frac{q^h(1 + q^{2h})\cos x}{1 + 2q^{2h}\cos 2x + q^{4h}}$$

$$4')\ \frac{2\varkappa_,K}{\pi} \cdot \frac{1}{\Delta\ am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)} = 1 + 4\sum_1^{\infty}(-1)^h\frac{q^{2h-1}(q^{2h-1} + \cos 2x)}{1 + 2q^{2h-1}\cos 2x + q^{4h-2}}$$

$$5') \quad \frac{2\varkappa\varkappa_{,}K}{\pi} \cdot \frac{\sin\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)}{\Delta\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)} = 4\sum_{1}^{\infty}(-1)^h \cdot \frac{q^{\frac{2h-1}{2}}\left(1-q^{2h-1}\right)\sin x}{1+2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2}}$$

$$6') \quad \frac{2\varkappa K}{\pi} \cdot \frac{\cos\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)}{\Delta\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)} = 4\sum_{1}^{\infty}(-1)^h \cdot \frac{q^{\frac{2h-1}{2}}\left(1+q^{2h-1}\right)\cos x}{1+2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2}}.$$

Setzt man endlich rechts für x $\quad x+\frac{\pi}{2}$, so sind dies respektive die Entwicklungen der Funktionen:

$$7') \quad \frac{2K}{\pi} \cdot \operatorname{cotang}\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = \operatorname{cotang} x + 4\sum_{1}^{\infty}(-1)^h \cdot \frac{q^{2h}\sin x}{1-2q^{2h}\cos 2x+q^{4h}}$$

$$8') \quad \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{\Delta\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)}{\sin\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)} = \operatorname{cosec} x + 4\sum_{1}^{\infty}(-1)^h \cdot \frac{(1+q^{2h})\sin x}{1-2q^{2h}\cos 2x+q^{4h}}$$

$$9') \quad \frac{2K}{\pi} \cdot \operatorname{cosec}\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = \operatorname{cosec} x + 4\sum_{1}^{\infty}\frac{q^h(1+q^{2h})\sin x}{1-2q^{2h}\cos 2x+q^{4h}}$$

$$10') \quad \frac{2K}{\pi} \cdot \Delta\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = 1 + 4\sum_{1}^{\infty}(-1)^{h-1} \cdot \frac{q^{2h-1}\cos 2x - q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2}}$$

$$11') \quad \frac{2\varkappa K}{\pi} \cdot \cos\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = 4 \cdot \sum_{1}^{\infty}(-1)^{h-1}\, \frac{q^{\frac{2h-1}{2}}\left(1-q^{2h-1}\right)\cos x}{1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2}}$$

$$12') \quad \frac{2\varkappa K}{\pi} \cdot \sin\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = 4 \cdot \sum_{1}^{\infty}\frac{q^{\frac{2h-1}{2}} \cdot \left(1+q^{2h-1}\right)\sin x}{1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2}}$$

in derselben Art abgeleitet, wie es in den bezeichneten Vorträgen von mir, wie ich glaube, zum ersten Mal ausgeführt worden ist. —

Das Weitere behalte ich einem nächsten Schreiben vor etc.

Zweites Schreiben des Herrn Professor Dr. Schröter an den Herausgeber.

Breslau, den 28. Januar 1868.

Ihre gütige Zuschrift brachte mir die vollständigste Bestätigung meiner Vermuthung, dass Sie nämlich in Ihren Vorträgen über elliptische Funktionen die Landensche Transformation ebensowohl zur Ableitung der Partialbruch- und Reihenentwicklungen in der Theorie, wie der Produktentwicklungen benutzt haben. Die Art, wie ich in meinem diesjährigen Seminar die Reihenentwicklungen aus derselben Quelle abgeleitet habe, stimmt mit der Ihrigen im Wesentlichen überein. Ich habe aber Ihre allgemeine Formel XV. nicht gekannt, wohl aber, wie aus meinem ersten Briefe hervorgeht, die Formeln XIII. Uebrigens ist es mir jetzt auch eingefallen, wie aus diesen $s\,u$ entwickelt werden kann. Ich habe nämlich durch Quadrirung der erstern:

$$\left(\frac{K_,}{K_,'}\right)^2 \Delta^2(u,\varkappa) = 2\varkappa_,' + \Delta^2(u_,',\varkappa') + \Delta^2(u'+K',\varkappa'),$$

und durch Multiplication beider:

$$\frac{\varkappa K_, K_,}{K_,' K_,'} \cos am\,(u,\varkappa)\; \Delta\, am\,(u,\varkappa) = \frac{\varkappa K_, K_,}{K_,' K_,'} \cdot \frac{d \sin am\,(u,\varkappa)}{du} =$$

$$\Delta^2 am\,(u',\varkappa') - \Delta^2 am\,(u'+K',\varkappa')$$

erhalten. Diese Gleichung lässt sich mit Hülfe der Gleichung XVII. ebenso fortsetzen, und führt zur Entwicklung des Differenzialquotienten von sin *am* (*u*), woraus dann durch Integration die Reihenentwicklung für sin *am* (*u*) selbst folgt.

In Ihrem Schreiben wird auch die Benutzung der Gaussischen Transformation zur Entwicklung der unendlichen Produkte für die elliptischen Functionen berührt; aber Sie gehn hierauf um so weniger ein, als die aus der Gaussischen Transformation fliessende Formel, welche zur Produktentwicklung führt, mit der aus der Landenschen Transformation sich ergebenden durch Einführung eines imaginären Arguments in Uebereinstimmung gebracht werden kann.

Gestatten Sie mir, hochverehrter Freund, in ähnlicher Weise, wie sie die Landensche Transformation zur Ableitung der Reihenentwicklungen in Anwendung gebracht haben, direkt auch die Gaussische Transformation zu diesem Zwecke zu verwerthen und Ihnen die hierauf bezüglichen Formeln in Kürze mitzutheilen. Die Rechnung scheint mir hier sich noch etwas kürzer zu gestalten, denn während dort beim Uebergange zur Grenze die elliptischen Funktionen mit dem Modul 1 auftreten und die Grösse $q_,$, kommen wir hier auf die elliptischen Funktionen für den Modul o d. h. auf trigonometrische Functionen und die Grösse q unmittelbar. Es scheint sogar, wenn ich eine solche Vermuthung auszusprechen wagen darf, nicht unmöglich, dass Gauss selbst auf diesem Wege zu den Formeln der Theorie, welche er ja doch vor Abel und Jacobi gekannt haben soll, gelangt sein mag. Darüber wird uns der nächstens herauskommende Theil seiner gesammelten Werke aufklären.

Die von Gauss in seiner „Determinatio attractionis" etc. gebrauchte Transformation ist bekanntlich:

$$1. \qquad \sin\varphi = \frac{2\sin\varphi_0}{1+\varkappa_, + (1-\varkappa_,)\sin^2\varphi_0},$$

woraus folgt:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa\varkappa\sin^2\varphi}} = \frac{2}{1+\varkappa_,} \cdot \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^0\varkappa^0\sin^2\varphi}},$$

das ganze elliptische Integral erster Gattung:

$$K = \frac{2}{1+\varkappa_,} \cdot K^0,$$

und für die complementären Moduln:

$$\varkappa_, = \sqrt{1-\varkappa\varkappa}\,,\ \varkappa_,^0 = \frac{2\sqrt{\varkappa_,}}{1+\varkappa_,}\,,$$

$$K_, = \frac{1}{1+\varkappa_,}\, K_,^0\,,$$

also:

$$\frac{K_,^0}{K^0} = 2\,\frac{K_,}{K}$$

sich ergiebt.

Die ursprüngliche Gleichung 1 liefert nach leichter Umformung die Beziehungen:

$$2. \qquad \cos\varphi = \frac{\cos\varphi_0\, \Delta(\varphi_0, \varkappa^0)}{1+\varkappa^0 \sin^2\varphi_0}$$

$$3. \qquad \Delta(\varphi, \varkappa) = \frac{1-\varkappa^0\sin^2\varphi_0}{1+\varkappa^0\sin^2\varphi_0}\,,$$

wo zur Abkürzung, wie bei Ihnen,

$$\Delta(\varphi, \varkappa) = \sqrt{1-\varkappa\varkappa\sin^2\varphi}$$

gesetzt ist. Diese Gleichungen lassen nun folgende bemerkenswerthe Gestalten zu:

$$4. \qquad \frac{2}{1+\varkappa_,} \cdot \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi_0} + \varkappa^0 \sin\varphi_0$$

$$5. \qquad \frac{2}{1+\varkappa_,} \cdot \frac{\Delta(\varphi, \varkappa)}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi_0} - \varkappa^0 \sin\varphi_0$$

$$6. \qquad \frac{2}{1+\varkappa_,} \cdot \frac{\Delta(\varphi, \varkappa)}{\cos\varphi} = \frac{\Delta(\varphi_0, \varkappa^0)}{\cos\varphi_0} + \varkappa^0\, \frac{\cos\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, \varkappa^0)}$$

$$7. \qquad \frac{2\varkappa_,}{1+\varkappa_,} \cdot \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\Delta(\varphi_0, \varkappa_0)}{\cos\varphi_0} - \varkappa^0\, \frac{\cos\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, \varkappa^0)}$$

$$8. \qquad \frac{2}{1+\varkappa_,} \cdot \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}\varphi_0\, \Delta(\varphi_0, \varkappa^0).$$

Von diesen und ähnlichen Relationen sollen vorzugsweise 4. und 5. in Betracht gezogen werden. Durch Einführung der umgekehrten Funktionen:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa)} = u, \qquad \varphi = am\,(u, \varkappa),$$

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa^0)} = \frac{K^0}{K}\, u, \ \varphi_0 = am\left(\frac{K^0}{K}\, u, \varkappa^0\right)$$

wird die Relation 4:

$$\frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin am\,(u, \varkappa)} = \frac{2K^0}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin am\left(\frac{K^0}{K}\, u, \varkappa^0\right)} + \frac{2K^0}{\pi} \cdot \varkappa^0 \sin am\left(\frac{K^0}{K} u, \varkappa^0\right);$$

Da nun:

$$\sin am\,(u + iK_,, \varkappa) = \frac{1}{\varkappa \sin am\,(u, \varkappa)}$$

ist, so lässt sich diese Gleichung, wenn wir noch:

$$u = \frac{2Kx}{\pi}$$

setzen, so schreiben:

$$\frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)} = \frac{2K^0}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin am\left(\frac{2K^0x}{\pi}, \varkappa^0\right)} + \frac{2K^0}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin am\left\{\frac{2K^0}{\pi}\left(x + \frac{iK_,^0\pi}{2K^0}\right), \varkappa^0\right\}}$$

wodurch die Function auf der linken Seite in die Summe zweier ähnlichen Funktionen aufgelöst wird, aber für einen Modul $\varkappa^0$, der kleiner als $\varkappa$ ist; diese Zerlegung lässt sich mit jeder der beiden Funktionen auf der rechten Seite wieder vornehmen und so bis ins Unendliche fortsetzen, wodurch man zuletzt auf den Modul o, und die ihm zugehörigen trigonometrischen Funktionen, anstatt der elliptischen, kommt. Setzen wir das Verhältniss:

$$-\frac{\pi K_{,}}{K} = lq,$$

so wird nach dem obigen:

$$-\frac{\pi K_{,}^0}{K^0} = 2\, lq;$$

während $\varkappa$ in $\varkappa^0$ übergeht, geht also q in q^2 über, und $\varkappa\; K\; K_{,}$ sind solche Funktionen von q, dass sie in $\varkappa^0$ $K^0\; K_{,}^0$ übergehn, wenn q in q^2 übergeht; in diesem Sinne bezeichnen wir auch zur Abkürzung:

$$\frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)} = \varphi(x, q)$$

und haben dann folgende Funktionalgleichung:

$$\varphi(x, q) = \varphi(x, q^2) + \varphi(x - ilq, q^2),$$

wozu noch die aus der Grundeigenschaft der Periodicität sich ergebende Beziehung:

$$\varphi(x - ilq, q) = \varphi(x, q)$$

hinzutritt. Mit Hülfe derselben lässt sich die vorige Funktionalgleichung zunächst so fortsetzen:

$$\varphi(x, q) = \varphi(x, q^4) + \varphi(x - ilq, q^4) + \varphi(x + ilq, q^4) + \varphi(x - 2ilq, q^4)$$

und allgemein:

$$\varphi(x, q) = \varphi(x, q^{2^n}) + \sum_{1}^{2^{n-1}-1} h \left\{ \varphi(x - hilq, q^{2^n}) + \varphi(x + hilq, q^{2^n}) \right\} + \varphi(x - 2^{n-1} ilq, q^{2^n}).$$

Gehn wir nun zur Grenze über, indem wir n bis ins Unendliche wachsen lassen, so wird:

$$\lim \varkappa^{(n)} = o, \quad \lim K^{(n)} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim \varphi(x, q^{2^n}) = \frac{1}{\sin x}.$$

das Restglied der Reihe:

$$\varphi(x - 2^{n-1} ilq, q^{2^n}) = \frac{2K^{(n)}}{\pi} \varkappa^{(n)} \sin am\left(\frac{2K^{(n)}x}{\pi}, \varkappa^{(n)}\right)$$

nähert sich der Null und wir erhalten die Reihenentwicklung 9′) in Ihrem Schreiben:

$$\frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin(x - hilq)},$$

welche mit der üblichen Form der Entwicklung in Partialbrüche übereinkommt, wenn wir das mittlere Glied für $h = o$ herausnehmen und die andern Glieder paarweise für gleiche und entgegengesetzte Werthe von h zusammenstellen:

$$\frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)} = \frac{1}{\sin x} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2i}{e^{ix} q^{-h} - e^{-ix} q^{h}} + \frac{2i}{e^{ix} q^{h} - e^{-ix} q^{-h}} \right),$$

oder auch:

$$\frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)} = \frac{1}{\sin x} + 4 \sum_{1}^{\infty} \frac{q^h (1 + q^{2h}) \sin x}{1 - 2q^{2h} \cos 2x + q^{4h}}.$$

Aus dieser Gleichung 9′) folgen dadurch, dass man für x $\quad x + \frac{\pi}{2} \quad x - \frac{i}{2}\, lq \quad x + \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} lq$ setzt die Formeln 3′) 12′) und 6′) in Ihrem Briefe.

Ganz ebenso wie die Relation 4) lässt sich auch die Relation 5) mit Hülfe der vorigen weiter fortsetzen und die Betrachtung unterscheidet sich von der frühern nur dadurch, dass die Glieder der Reihe mit abwechselnden Zeichen auftreten; aber wir bedürfen gar nicht mehr dieser Wiederholung, denn aus der obigen Relation 5:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\Delta\ am\left(\frac{2Kx}{\pi},\varkappa\right)}{\sin\ am\left(\frac{2Kx}{\pi},\varkappa\right)}=\frac{\frac{2K^0}{\pi}}{\sin\ am\left(\frac{2K^0x}{\pi},\varkappa^0\right)}-\frac{2\varkappa^0K^0}{\pi}\sin\ am\left(\frac{2K^0x}{\pi},\varkappa^0\right)$$

folgt, dass wenn wir in den Entwicklungen 9') und 12') für q q^2 schreiben und letztere von der ersteren abziehn, wir die neue Entwicklung erhalten, die in Ihrem Briefe unter 8') steht:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\Delta\ am\left(\frac{2Kx}{\pi},\varkappa\right)}{\sin\ am\left(\frac{2Kx}{\pi},\varkappa\right)}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^h}{\sin(x-hilq)}=\frac{1}{\sin x}+4\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^h\left(1+q^{2h}\right)\sin x}{1-2q^{2h}\cos 2x+q^{4h}}\,.$$

Aus dieser Formel folgen auf die obige Weise die Formeln 2') 11') 5') in Ihrem Schreiben.

Zu den vier letzten Entwicklungen könnten wir nun aus den schon vorhandenen gelangen, indem wir die einfachen Reihen in Doppelreihen auflösen und die Reihenfolge der Summation umkehren; aus der Formel 9') ergiebt sich nämlich, wenn wir die bekannte elementare Entwicklung der cosec in Partialbrüche:

$$\frac{1}{\sin x}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^h}{x+h\pi}$$

benutzen, folgende Doppelreihe:

$$\frac{2K}{\pi}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h}\ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h'}\ \frac{(-1)^{h'}}{x-hilq+h'\pi}\,.$$

Führen wir jetzt zuerst die Summation in Bezug auf den Index h mittelst der elementaren Formel:

$$\cot g\ x=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x+h\pi}$$

aus, so folgt:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{1}{\sin\ am\left(\frac{2Kx}{\pi},\varkappa\right)}=\frac{K}{K_,}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h}\ \frac{1}{i}(-1)^h\ \cot g\left\{\frac{K}{iK_,}(x+h\pi)\right\}\,.$$

Wird endlich hier für x $\frac{iK_,x}{K}$ gesetzt und die bekannte Grundformel für ein imaginäres Argument:

$$\sin\ am\ (iu,\varkappa)=i\ tg.\ am\ (u,\varkappa_,)$$

benutzt, endlich für $\varkappa_,$ $\varkappa$ zurückgesetzt, so folgt die Formel 7') Ihres Briefs:

7'. $$\frac{2K}{\pi}\cot g\ am\left(\frac{2Kx}{\pi},\varkappa\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^h\cot g\ (x-hilq)=\cot g\ x+4\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^h\cdot q^{2h}\sin 2x}{1-2q^{2h}\cos 2x+q^{4h}}$$

und diese Formel führt dann wieder zu den Formeln 1') 10') 4'), so dass man wiederum zu allen 12 Entwicklungen gelangt ist, mit denen Sie, geehrter Herr College, Ihre gefällige Mittheilung beschliessen.

Indessen gestehe ich gern zu, dass die Ableitung der letzten vier Entwicklungen aus den frühern ihr Bedenken hat, weil man die unendlichen Doppelreihen wohl nicht ohne ein genaueres Eingehen auf ihren Charakter anwenden, noch auch die Vertauschung der Reihenfolge der Summation ohne Weiteres vornehmen darf.

Um diesem Bedenken aus dem Wege zu gehn, kann man wieder auf die beiden anfänglichen Gleichungen 4 und 5 rekurriren, indem man einerseits die Gleichung 4 ins Quadrat erhebt und andrerseits das Produkt der beiden Gleichungen 4 und 5 bildet. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left\{\frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)}\right\}^2 = \psi(x, q),$$

so giebt das Quadrat der Gleichung 4:

$$\text{(a)} \quad \psi(x, q) = \psi(x, q^2) + \psi(x - ilq, q^2) + 2\varkappa^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2.$$

Ich benutze diese Gleichung nicht weiter um daraus die Entwicklung für $\sin^2 am$ abzuleiten, welche Jacobi in den Fundamenten durch Multiplication erhält, sondern füge die aus dem Produkt der beiden Gleichungen 4 und 5 hervorgehende Beziehung hinzu:

$$\text{(b)} \quad \frac{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \Delta\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)}{\sin^2 am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)} = \psi(x, q^2) - \psi(x - ilq, q^2).$$

Die Differenz der beiden Functionen ψ auf der rechten Seite lässt sich nun vermittelst der Relation (a) weiter zerlegen, indem das von x unabhängige Glied sich heraushebt, und so wird:

$$\frac{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \Delta\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)}{\sin^2 am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)} = \psi(x, q^4) - \psi(x - ilq, q^4) + \psi(x - 2ilq, q^4) - \psi(x - 3ilq, q^4)$$

oder da:

$$\psi(x - ilq, q) = \psi(x, q)$$

ist, auch:

$$= \psi(x, q^4) - \psi(x - ilq, q^4) - \psi(x + ilq, q^4) + \psi(x - 2ilq, q^4).$$

Genau dieselbe Schlussfolge, wie sie oben für die Function $\varphi(x, q)$ angewendet ist, führt hier zu dem Resultat:

$$\frac{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \Delta\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)}{\sin^2 am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{\sin^2(x - hilq)},$$

und da die linke Seite

$$= -\frac{d \cdot \frac{2K}{\pi} \operatorname{ctg} am\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)}{dx},$$

und ebenso:

$$\frac{1}{\sin^2(x - hilq)} = -\frac{d \operatorname{ctg}(x - hilq)}{dx}$$

ist, so erhalten wir durch Integration, weil die willkührliche Constante durch die Annahme für $x = \frac{\pi}{2}$ sich auf Null reducirt:

$$\frac{2K}{\pi} \cdot \operatorname{ctg} am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h \operatorname{ctg}(x - hilq),$$

was mit dem frühern Resultate 7') übereinstimmt. —

Indem ich dieses Schreiben beendige, erlaube ich mir meine Ansicht darüber noch hinzuzufügen, dass eine Veröffentlichung Ihrer Entwicklungen der übrigen elliptischen Transcendenten aus der Landenschen Transformation mir ebenso interessant erscheint, wie die der zwölf Grundfunktionen. — Sollten Sie sich, mein hochverehrter Freund, wie Sie in Ihrem freundlichen Schreiben andeuten, zu einer baldigen Herausgabe entschliessen, so würden Sie vielleicht geneigt sein, meine in diesem Schreiben gemachten Mittheilungen auf irgend eine Weise zu berücksichtigen. —

Antwort des Herausgebers.

Königsberg, den 10. Februar 1868.

Aus Ihrem Schreiben vom 28. Januar habe ich zu meiner Freude das Interesse wahrgenommen, welches Sie, geehrter Freund, meinen Mittheilungen über die Landensche Transformation gewidmet haben.

Die Ableitungsart der Entwicklung von

$$s\,(u\,,\varkappa)\,,$$

welcher Sie am Anfang Ihres Briefs erwähnen, weicht von der meinigen etwas ab, stützt sich aber zuletzt auf diejenigen Formeln, welche auch die Entwicklung der zweiten Gattung elliptischer Integrale liefern und welche ich in meinem ersten Schreiben schon angeführt habe. Ich meine namentlich die Formel XVIII. Ebendeshalb habe ich sie nicht an der Stelle benutzen wollen, wo es sich nur um die Entwicklung der elliptischen zwölf Grundfunctionen handelte. Ich sehe mich hienach veranlasst auf Ihren Vorschlag am Ende Ihres Schreibens einzugehn und theile Ihnen aus meinen Vorträgen des Jahres 1860 die folgende Benutzung der Landenschen Transformation zur Entwicklung der zweiten Gattung und der aus ihr folgenden Transcendenten mit.

Es bieten sich fast von selbst die beiden Gleichungen:

$$\mathrm{I}'.\quad \begin{aligned} Z(\varphi\,,\varkappa) &= \frac{\sqrt{\varkappa}}{\varkappa'}\,.\,\Big\{Z\,(\varphi_{,}'\,\varkappa') - Z\,(\psi_{,}'\,\varkappa')\Big\} \\ \varkappa\,\sin\varphi &= \frac{\sqrt{\varkappa}}{\varkappa'}\,.\,\Big\{Z\,(\varphi_{,}'\,\varkappa') + Z\,(\psi_{,}'\,\varkappa')\Big\} \end{aligned}$$

dar, sobald man nur erst auf den Gedanken gekommen ist, das Argument ψ', durch die Formeln:

$$\sin\psi' = \frac{\cos\varphi'}{\varDelta\,(\varphi',\varkappa')}$$

$$\cos\psi' = \frac{\varkappa_{,}'\sin\varphi'}{\varDelta\,(\varphi',\varkappa')}$$

definirt, ebenfalls in die Landensche Transformation einzuführen.

Ich bediene mich hiebei der Bezeichnungen:

$$Z\,(\varphi\,,\varkappa) = \frac{K\,.\,E\,(\varphi\,,\varkappa) - E\,F\,(\varphi\,,\varkappa)}{K}$$

$$\mathrm{E}\,(\varphi\,,\varkappa) = \int_0^{\varphi} d\varphi\,.\,\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}$$

$$\mathrm{F}\,(\varphi\,,\varkappa) = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}\,.$$

$$\mathrm{E} \qquad = \int_0^{\pi/2} d\varphi\,.\,\varDelta\,(\varphi\,,\varkappa)\,,$$

und ebenderselben letzteren mit:

$$\mathrm{E}_{,}'\ \mathrm{E}''\ \text{etc.}$$

für die transformirten Moduln.

Da nun offenbar:

$$\varphi' = am\,\frac{K'u}{2K}$$

$$\psi' = am\left(K' - \frac{K'u}{2K}\right)$$

wird, wenn:

$$\varphi = am\,(u, \varkappa)$$

gesetzt wird, so gehn die beiden aufgestellten Gleichungen, wenn man die Jakobische Funktionen

$$Z(u, \varkappa) = \mathcal{E}(u, \varkappa) - .\frac{E}{K} = \mathsf{Z}(\varphi, \varkappa)$$

$$\mathcal{E}(u, \varkappa) = \int_0^u \Delta^2 u\, du = E(\varphi, \varkappa)$$

einführt, in folgende über:

$$\text{II}'. \left\{ \begin{aligned} Z(u, \varkappa) &= \frac{K'}{2K} . \left\{ Z\left(\frac{K'u}{2K}, \varkappa'\right) - Z\left(K' - \frac{K'u}{2K}, \varkappa'\right) \right\} \\ \varkappa s(u, \varkappa) &= \frac{K'}{2K} . \left\{ Z\left(\frac{K'u}{2K}, \varkappa'\right) + Z\left(K' - \frac{K'u}{2K}, \varkappa'\right) \right\} \end{aligned} \right. ,$$

welche in den Fundamenten pag. 134 mutatis mutandis aus der Reihenentwicklung abgeleitet sind, aber eigentlich schon in den Arbeiten Legendres über die zweite Gattung enthalten sind, wie ich bald zeigen werde. Der direkte Nachweis ihrer Richtigkeit ergiebt sich durch ihre Differentiation nach u; denn von den daraus entstehenden beiden Gleichungen:

$$\text{III}'. \left\{ \begin{aligned} \Delta^2(u, \varkappa) - \frac{E}{K} &= \frac{K'K'}{4KK} . \left\{ \Delta^2\left(\frac{K'u}{2K}, \varkappa'\right) + \Delta^2\left(K' - \frac{K'u}{2K}, \varkappa'\right) - 2\frac{E'}{K'} \right\} \\ c(u, \varkappa) . \Delta(u, \varkappa) &= \frac{K'K'}{4KK} . \left\{ \Delta^2\left(\frac{K'u}{2K}, \varkappa'\right) - \Delta^2\left(K' - \frac{K'u}{2K}, \varkappa'\right) \right\} \end{aligned} \right.$$

folgt die erstere aus der Gleichung XVIII. dadurch, dass man ihre beiden Seiten von o bis u integrirt. Man erhält dann:

$$\int_0^u \Delta^2(u, \varkappa)\, du = \frac{K'}{2K} . \left\{ \int_0^{u'} \Delta^2(u', \varkappa')\, du' + \int_0^{u'} \Delta^2(K' - u', \varkappa')\, du' \right\} + \varkappa_,' . \frac{K'K'u}{2KK}$$

und für $u' = K'$ wofür $u = 2K$ ist:

$$E = \frac{K'}{2K} . E' + \frac{\varkappa_,' K'K'}{2K} .$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $\varkappa_,'$, so gelangt man zur ersten der Gleichungen II'. — Wenn man die Gleichungen XIII. mit einander multiplicirt und von o an integrirt, so entsteht die 2te der Formeln II'. —

Es dürfte jedoch nicht überflüssig sein, wenn ich die Formeln I'. unmittelbar aus der Landenschen Transformation in ihrer trigonometrischen Form ableite, wie ich es ebenfalls in der genannten Vorlesung gethan habe, weil sich daran jene Bemerkungen über die zweite Gattung anschliessen, welche mit dem Landenschen Theorem (vide Anmerk.), woraus Legendre die Transformation entnommen hat, und mit den Arbeiten des letztern über diesen Gegenstand im direktesten Zusammenhang stehn.

Die Variabeln ψ und φ sind durch die Gleichungen verbunden:

$$\Delta(\psi, \varkappa) = \frac{\varkappa_,}{\Delta(\varphi, \varkappa)} ,$$

$$\frac{d\psi}{\Delta(\psi, \varkappa)} = -\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa)} ,$$

$$\Delta(\psi, \varkappa) . d\psi = -\frac{\varkappa_, \varkappa_, d\varphi}{(\Delta(\varphi, \varkappa))^2}$$

$$F(\varphi, \varkappa) + F(\psi, \varkappa) = K.$$

Da nun aus der Differentiation der Grundformel der Transformation:

$$\sin\varphi = \frac{2K}{K'} \cdot \frac{\sin\varphi' \cos\varphi'}{\Delta\varphi'},$$

$$d \sin\varphi = \frac{2K}{\varkappa'\varkappa' K'} \cdot \left\{ \Delta(\varphi', \varkappa') - \frac{\varkappa_1'\varkappa_1'}{(\Delta(\varphi', \varkappa'))^3} \right\} d\varphi',$$

und vermittelst der vorigen Hülfsformel folgende Gleichung hervorgeht:

$$d \sin\varphi = \frac{2K}{\varkappa'\varkappa' K'} \cdot \left\{ \Delta(\varphi', \varkappa')\, d\varphi' + \Delta(\psi', \varkappa')\, d\psi' \right\},$$

so giebt ihre Integration:

von $\varphi = o$ an

„ $\varphi' = o$ „

„ $\psi' = \frac{\pi}{2}$ „

$$\sin\varphi = \frac{2K}{\varkappa'\varkappa' K'} \cdot (\mathrm{E}(\varphi', \varkappa') + \mathrm{E}(\psi', \varkappa') - \mathrm{E}').$$

Diese Formel giebt aber, wenn man statt E′ den gleichen Werth:

$$\frac{E'}{K'} \cdot \left\{ \mathrm{F}(\varphi', \varkappa') + \mathrm{F}(\psi', \varkappa') \right\}$$

substituirt, und für:

$$\varkappa'\varkappa' : \qquad \left(\frac{2K}{K'}\right)^2 \cdot \varkappa$$

setzt, die zweite der Gleichungen I′.

Die erste derselben ist leicht als eine unmittelbare Folge der eben gefundenen und aus der Anwendung der Landenschen Transformation auf die zweite Gattung, wie folgt, zu erkennen.

Wenn man die zweite der Gleichungen V. mit $\varkappa$ multiplicirt, so erhält man die auch schon von Legendre a. a. O. bei der zweiten Gattung benutzte Formel:

IV′. $$\frac{\varkappa \cos\varphi + \Delta(\varphi, \varkappa)}{1 + \varkappa} = \Delta(\varphi', \varkappa'),$$

welche mit:

V′. $$\left(\frac{1+\varkappa}{2}\right) \frac{\Delta(\varphi', \varkappa')}{\Delta(\varphi, \varkappa)} \cdot d\varphi = d\varphi'$$

multiplicirt und von o an integrirt, zu der Transformations-Gleichung des Integrals zweiter Gattung führt, wie sie (vide Anmerkung), unmittelbar aus dem Landenschen Theorem hervorgeht:

$$\mathrm{E}(\varphi' \varkappa') = \frac{E(\varphi, \varkappa) + \varkappa \sin\varphi}{1 + \varkappa} - \frac{1 - \varkappa}{2} \cdot \mathrm{F}(\varphi, \varkappa).$$

Aus ihr folgt für $\varphi = \pi$, also $\varphi' = \frac{\pi}{2}$,

$$\mathrm{E}' = \frac{2E}{1+\varkappa} - (1-\varkappa)\, K.$$

Da nun:

$$\frac{2}{1 + \varkappa} = \frac{2K}{K'}$$

ist, so ist die unmittelbare Folge dieser Gleichungen und der Gleichung:

$$\mathrm{F}(\varphi', \varkappa') = \frac{K'}{2K} \cdot \mathrm{F}(\varphi, \varkappa),$$

die elegante Formel:

VI′. $$\frac{K'}{K} \mathrm{Z}(\varphi', \varkappa') - \mathrm{Z}(\varphi, \varkappa) = \varkappa \sin\varphi,$$

welche, mit der zweiten Gleichung I′. verbunden, die erste Gleichung I′. liefert.

Ich habe jedoch ausserdem die Anwendung der Landenschen Transformation auf die zweite Gattung in eine etwas allgemeinere Form gekleidet, deren ich hier noch kurz Erwähnung thun will. Bezeichnet man die Determinante, deren Elemente die vier Integrale:

$$\begin{vmatrix} F(\varphi,\varkappa), & F(\chi,\varkappa) \\ E(\varphi,\varkappa), & E(\chi,\varkappa) \end{vmatrix}$$

sind, durch:

$$D(\varphi,\chi,\varkappa)$$

oder kürzer durch D, ebenso die durch die Landensche Transformation transformirte Funktion:

$$D(\varphi',\chi',\varkappa')$$

durch D', in der Art, dass χ' von χ ebenso abhängt, wie φ' von φ, so gilt das elegante Theorem:

„Das Verhältniss der beiden Determinanten, deren Elemente:

$$\begin{vmatrix} 2, & 1 \\ D, & D' \end{vmatrix}$$

und:

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi, & \sin\chi \\ F(\varphi,\varkappa), & F(\chi,\varkappa) \end{vmatrix}$$

sind, hat den constanten Werth des Moduls $\varkappa$."

Der direkte Beweis desselben folgt aus der Umformung des Doppelintegrals:

$$\int_0^{\varphi'}\int_0^{\chi'} \frac{d\varphi'\,d\chi'}{\Delta(\varphi'\varkappa')\,\Delta(\chi'\varkappa')} \cdot \left\{\Delta^2(\varphi',\varkappa') - \Delta^2(\chi',\varkappa')\right\}$$

durch die Landensche Transformation. Denn vermittelst der für φ und χ angewendeten Formel IV'. ergiebt sich leicht:

$$\Delta^2(\varphi',\varkappa') - \Delta^2(\chi',\varkappa') = \frac{\varkappa'\varkappa'}{2\varkappa} \cdot (\Delta^2(\varphi,\varkappa) - \Delta^2(\chi,\varkappa) + \frac{\varkappa'\varkappa'}{2}(\cos\varphi\,\Delta\varphi - \cos\chi\,\Delta\chi)\,.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der folgenden, die aus der frühern V'. sich von selbst versteht:

$$\frac{d\varphi'\,d\chi'}{\Delta(\varphi',\varkappa')\,\Delta(\chi',\varkappa')} = \frac{\varkappa}{\varkappa'\varkappa'} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)} \cdot \frac{d\chi}{\Delta(\chi,\varkappa)}$$

und führt im zweiten Gliede der rechten Seite die Integration aus, so erhält man die Gleichung:

$$\int_0^{\varphi'}\int_0^{\chi'} \frac{d\varphi'}{\Delta(\varphi'\varkappa')} \cdot \frac{d\chi'}{\Delta(\chi',\varkappa')} - \int_0^{\varphi}\int_0^{\chi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)} \cdot \frac{d\chi}{\Delta(\chi,\varkappa)}$$

$$= \frac{\varkappa}{2}\Big(\sin\chi\,F(\varphi,\varkappa) - \sin\varphi\,.\,F(\chi,\varkappa)\Big)\,,$$

welche das zu beweisende Theorem ist. — Setzt man z. B.

$$\chi = \pi, \quad \text{also:} \quad \chi' = \frac{\pi}{2}\,,$$

so erhält man aus diesem Theorem:

$$\Big(K'E(\varphi',\varkappa') - E'F(\varphi',\varkappa')\Big) - \Big(K\,.\,E(\varphi,\varkappa) - E\,F(\varphi,\varkappa)\Big) = \varkappa K \sin\varphi$$

d. h. die zweite Gleichung I'.

Nach diesen Abschweifungen kehre ich zu den Gleichungen II'. zurück, deren erste sich unmittelbar fortsetzen lässt und dann die Transformationsgleichung der Ordnung 2^n der Funktion $Z(u,\varkappa)$ liefert.

Ich setze in ihr der Einfachheit halber statt:

$$u: \quad -u$$

und erhalte dann, für:

$$\frac{K'}{2K} = \frac{K_,'}{K_,}$$

gesetzt:

$$Z(u, \varkappa) = \frac{K_,'}{K_,} \cdot \left\{ Z\left(\frac{K_,'}{K_,} u\right) + Z\left(\frac{K_,'}{K_,} u + K'\right) \right\}$$

(mod $\varkappa'$)

$$Z(u, \varkappa) = \frac{K_,^{(n)}}{K_,} \cdot \sum_{0}^{2^n-1} {}^{h}\, Z\left(\frac{K_,^{(n)}}{K_,} u + \frac{h\,K^{(n)}}{2^{n-1}}\right)$$

(mod $\varkappa^{(n)}$).

Nun ist aber, wie leicht durch die Definition von:

$$Z(u, \varkappa)$$

erkannt wird:

$$Z(u + K, \varkappa) = Z(u - K, \varkappa).$$

Also wird auch:

$$Z\left(u + \frac{h\,K^{(n)}}{2^{n-1}}, \varkappa^{(n)}\right) = Z\left(u - \frac{(2^n - h)}{2^{n-1}} \cdot K^{(n)}, \varkappa^{(n)}\right),$$

und daher:

$$Z(u, \varkappa) =$$

$$\frac{K_,^{(n)}}{K_,} \cdot \left\{ Z\left(\frac{K_,^{(n)}}{K_,} u\right) + Z\left(\frac{K_,^{(n)}}{K_,} u + K^{(n)}\right) + \sum_{1}^{2^{n-1}-1} Z\left(\frac{K_,^{(n)}}{K_,} u + \frac{h\,K^{(n)}}{2^{n-1}}\right) + Z\left(\frac{K_,^{(n)}}{K_,} u - \frac{h\,K^{(n)}}{2^{n-1}}\right) \right\}.$$

Das Differential dieser Gleichung giebt hienach,

$$E^{(n)} = \int_0^{\pi/2} \Delta(\varphi^{(n)}, \varkappa^{(n)})\, d\varphi$$

gesetzt:

$$\Delta^2(u, \varkappa) - \frac{E}{K} =$$

$$\left(\frac{K_,^{(n)}}{K_,}\right)^2 \cdot \left\{ \Delta^2\left(\frac{K_,^{(n)}}{K_,} u\right) + \Delta^2\left(\frac{K_,^{(n)}}{K_,} u + K^{(n)}\right) + \sum_{1}^{2^{n-1}-1} \left\{ \Delta^2\left(\frac{K_,^{(n)}}{K_,} u + \frac{h\,K_,^{(n)}}{2^{n-1}}\right) + \Delta^2\left(\frac{K_,^{(n)}}{K_,} u - \frac{h\,K_,^{(n)}}{2^{n-1}}\right) \right\} \right\}$$

$$- \frac{K_,^{(n)}}{K_,} \cdot \frac{E^{(n)}}{K^{(n)}} \cdot \frac{K_,^{(n)}}{K_,} \left\{ 2^n - 1 \right\}.$$

Mit Benutzung der Formeln:

VII'.

$$\frac{K^{(n)}}{2^n\,K} = \frac{K_,^{(n)}}{K_,},$$

erhält man folgende Umformung des letzten Glieds:

$$\left(\frac{K_,^{(n)}}{K_,}\right)^2 \frac{E^{(n)}}{K^{(n)}} (2^n - 1) = \frac{K_,^{(n)}}{K_,} \frac{E^{(n)}}{K} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Setzt man nun $n = \infty$, so erhält man:

$$\text{Lim}\, \Delta^2\left(\frac{K_,^{(n)}}{K_,} u \pm \frac{h\,K_,^{(n)}}{2^{n-1}}, \varkappa^{(n)}\right) = \frac{4}{(q_,^{\pm h}\, e^{x_,} + q_,^{\mp h}\, e^{-x_,})^2},$$

worin:

$$\frac{K_,^{(n)}}{K_,} u = x_, = \frac{\pi u}{2K_,}$$

gesetzt ist. Ferner gelten, wie leicht einzusehn ist, die Grenzwerthe:

VIII'.
$$\begin{cases} \operatorname{Lim} \Delta^2\left(\frac{K_{,}^{(n)}}{K_{,}}u + K^{(n)}\right) = \operatorname{Lim} \frac{\varkappa_{,}^{(n)}\varkappa_{,}^{(n)}}{\Delta^2\left(\frac{K_{,}^{(n)}}{K_{,}}u\right)} = o, \\ \operatorname{Lim} E^{(n)} = 1, \quad \operatorname{Lim} K_{,}^{(n)} = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Lim} K^{(n)} = \log\frac{4}{\varkappa_{,}^{(n)}}, \\ \operatorname{Lim}(2^n - 1)\left(\frac{K_{,}^{(n)}}{K^{(n)}}\right)^2 \cdot \frac{E^{(n)}}{K^{(n)}} = \frac{2K_{,}}{\pi K}\cdot\left(\frac{\pi}{2K_{,}}\right)^2 = \frac{\pi}{2KK_{,}}, \end{cases}$$

und daher zuletzt die Entwicklung:

IX'.
$$\Delta^2(u,\varkappa) - \frac{E}{K} =$$
$$\left(\frac{\pi}{2K_{,}}\right)^2 \cdot \left\{\frac{4}{(e^{x_{,}} + e^{-x_{,}})^2} + \sum_1^\infty \left\{\frac{4}{(q_{,}^h e^{ix_{,}} + q_{,}^{-h} e^{-ix_{,}})^2} + \frac{4}{(q_{,}^{-h} e^{ix_{,}} + q_{,}^h e^{-ix_{,}})^2}\right\}\right\} - \frac{\pi}{2KK_{,}}.$$

Wenn man diese Gleichung mit:
$$du = \frac{2K_{,}}{\pi}\cdot dx_{,}$$
multiplicirt und integrirt, so geht daraus die Entwicklung von $Z(u,\varkappa)$ von folgender Art hervor:

X'.
$$Z(u,\varkappa) = \frac{\pi}{2K_{,}}\cdot\left\{\left(\frac{e^{x_{,}} - e^{-x_{,}}}{e^{x_{,}} + e^{-x_{,}}}\right) - \frac{\pi x_{,}}{2KK_{,}} + \sum_1^\infty\left(\frac{q_{,}^h e^{x_{,}} - q_{,}^{-h} e^{-x_{,}}}{q_{,}^h e^{x_{,}} + q_{,}^{-h} e^{-x_{,}}} + \frac{q_{,}^{-h} e^{x_{,}} - q_{,}^h e^{-x_{,}}}{q_{,}^{-h} e^{x_{,}} + q_{,}^h e^{-x_{,}}}\right)\right\},$$

welcher man auch die Form geben kann:

XI'.
$$\frac{2K_{,}}{\pi}\cdot Z\left(\frac{2K_{,}x_{,}}{\pi},\varkappa\right) = \frac{e^{x_{,}} - e^{-x_{,}}}{e^{x_{,}} + e^{-x_{,}}} - \frac{2K_{,}x_{,}}{\pi\cdot K} + \sum_1^\infty \frac{2q_{,}^{2h}(e^{2x_{,}} - e^{-2x_{,}})}{(1 + q_{,}^{2h}e^{2x_{,}})(1 + q_{,}^{2h}e^{-2x_{,}})}$$

Setzt man in der vorletzten Formel für u einmal $\frac{K'u}{2K}$ und zweitens $K' - \frac{Ku}{2K}$ und für $\varkappa$ $\varkappa'$, addirt die beiden Resultate, und benutzt die 2. Formel II'., so gelangt man zu der Entwicklungsart von $s(u,\varkappa)$, welche mit der in Ihrem Schreiben angedeuteten im Wesentlichen übereinstimmt, und die Veranlassung zu diesen Mittheilungen gewesen ist. Ich werde jedoch nicht weiter darauf eingehn. Diese Entwicklungsart der Funktion $Z(u,\varkappa)$ ist wesentlich verschieden von der gewöhnlichen, und folgt, wie Sie sehn, direkt aus der Landenschen Transformation mit vergrössertem Modul. Ehe ich zu den andern übergehe, will ich diese vermittelst früherer aus derselben Quelle gezogener Resultate etwas modificiren.

Wenn man die in meinem ersten Briefe abgeleitete Gleichung:
$$c(u,\varkappa) = c\left(\frac{2K_{,}x_{,}}{\pi},\varkappa\right) = \frac{\sqrt{\varkappa_{,}}}{2\sqrt{\varkappa}\sqrt[4]{q_{,}}}\cdot\frac{2}{e^{x_{,}} + e^{-x_{,}}}\cdot\prod_1^\infty\left(\frac{1 - q_{,}^{2h-1}e^{2x_{,}}}{1 + q_{,}^{2h}e^{2x_{,}}}\right)\left(\frac{1 - q_{,}^{2h-1}e^{-2x_{,}}}{1 + q_{,}^{2h}e^{-2x_{,}}}\right)$$
logarithmisch nach $x_{,}$ differentiirt, so erhält man nach leichter Reduktion:
$$\frac{2K_{,}}{\pi}\cdot\frac{s(u,\varkappa)\,\Delta(u,\varkappa)}{c(u,\varkappa)} =$$
$$\frac{e^{x_{,}} - e^{-x_{,}}}{e^{x_{,}} + e^{-x_{,}}} + \sum_1^\infty \frac{2q_{,}^{2h-1}(e^{2x_{,}} - e^{-2x_{,}})}{(1 - q_{,}^{2h-1}e^{2x_{,}})(1 - q_{,}^{2h-1}e^{-2x_{,}})} + \sum_1^\infty \frac{2q_{,}^{2h}(e^{2x_{,}} - e^{-2x_{,}})}{(1 + q_{,}^{2h}e^{2x_{,}})(1 + q_{,}^{2h}e^{-2x_{,}})}.$$

Man kann daher der letzten Gleichung mit Hülfe dieser die Form geben:
$$\frac{2K_{,}}{\pi}\cdot\left\{Z(u,\varkappa) - \frac{s(u,\varkappa)\Delta(u,\varkappa)}{c(u,\varkappa)} + \frac{\pi u}{2K_{,}K}\right\} = -\sum_1^\infty \frac{2q_{,}^{2h-1}(e^{2x_{,}} - e^{-2x_{,}})}{1 - q_{,}^{2h-1}(e^{2x_{,}} + e^{-2x_{,}}) + q_{,}^{4h-2}}.$$

Das Differential des Ausdrucks auf der linken Seite dieser Gleichung nach u ist nach leichten Reduktionen:
$$\frac{2K_{,}}{\pi}\cdot\left\{1 - \frac{\Delta^2(u)}{c^2(u)} - \frac{E}{K} + \frac{\pi}{2K_{,}K}\right\}.$$

Setzt man hierin,

$$\begin{array}{lll} \text{statt } u & & iu, \\ \text{„ } \varkappa & & \varkappa_{,}, \\ \text{„ } \varkappa_{,} & & \varkappa, \end{array}$$

so erhält man, mit Benutzung der bekannten fundamentalen Formeln, dafür den Ausdruck:

$$\frac{2K}{\pi} \cdot \left(1 - \Delta^2(u,\varkappa) - \frac{E_{,}}{K_{,}} + \frac{\pi}{2KK_{,}}\right),$$

so dass, indem man auf der rechten Seite dieselben Operationen macht, und also

$$\begin{array}{lll} \text{statt } x_{,} & & \frac{\pi u}{2K_{,}}, \\ \text{„ } x & & \frac{\pi u}{2K} \end{array}$$

setzt, durch wieder angestellte Integration die Gleichung hervorgeht:

$$\frac{2K}{\pi}\left(u\left(1 + \frac{\pi}{2KK_{,}} - \frac{E_{,}}{K_{,}}\right) - \mathcal{E}(u,\varkappa)\right) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{4q^{2h-1}\sin 2x}{1-2q^{2h-1}\cos 2x + q^{4h-2}}.$$

Setzt man hierin:

$$u = K,$$

so erhält man:

$$\frac{2K}{\pi} \cdot \left\{K\left(1 + \frac{\pi}{2KK_{,}} - \frac{E_{,}}{K_{,}}\right) - E\right\} = o$$

und aus Verbindung beider Gleichungen endlich die andere Entwicklung für $Z(u,\varkappa)$:

XII'.
$$\frac{2K}{\pi} \cdot Z\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = \sum_{1}^{\infty} \frac{4q^{2h-1}\sin 2x}{1-2q^{2h-1}\cos 2x + q^{4h-2}},$$

welche durch Integration auf die Transcendente:

XIII'.
$$X\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \int_0^{\frac{2Kx}{\pi}} Z(u,\varkappa)\,du = \sum_{1}^{\infty} \log\left(\frac{1-2q^{2h-1}\cos 2x + q^{4h-2}}{(1-q^{2h-1})^2}\right)$$

und von da:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi},\varkappa\right)}{\Theta(o,\varkappa)} = e^{X\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$$

gesetzt, zu:

XIV'.
$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi},\varkappa\right)}{\Theta(o,\varkappa)} = \Pi\, \frac{1-2q^{2h-1}\cos 2x + q^{4h-2}}{(1-q^{2h-1})^2},$$

also in die weitere ganze Theorie der elliptischen Transcendenten führt.

Ich darf wohl nicht, verehrter Freund, Ihre Aufmerksamkeit darauf lenken, dass ich direkt zu diesem Ziel gelangt wäre, wenn ich die in den Fundamenten pag. 102 unter Voraussetzung des Legendreschen Satzes abgeleitete Formel:

$$i\,Z(iu) = -\operatorname{tang} am(u,\varkappa)\,\Delta\, am(u,\varkappa_{,}) + \frac{\pi u}{2KK_{,}} + Z(u,\varkappa_{,})$$

hätte benutzen wollen, während ich hier unabhängig davon den Legendreschen Satz unmittelbar aus der Landenschen Transformation deducirt habe. —

Gestatten Sie mir Einiges über die von Legendre im Cap. XXI. gegebenen Näherungsformeln der elliptischen Integrale zweiter Gattung und ihren wesentlichen Unterschied in der Anwendung auf die vorige Entwicklung auseinander zu setzen.

Legendre giebt eine solche Näherungsformel mit abnehmenden, und eine zweite mit wachsenden Moduln der Landenschen Transformation. Ich werde zuerst die letztere im Anschluss an die Formel VI'. angeben. —

Dieselbe giebt in ihrer Fortsetzung die folgenden Gleichungen:

$$Z(\varphi, \varkappa) - \frac{K'}{K} Z(\varphi', \varkappa') + \varkappa \sin \varphi = o,$$

$$\frac{K'}{K} \cdot Z(\varphi', \varkappa') - \frac{K''}{K} \cdot Z(\varphi'', \varkappa'') + \frac{\varkappa' K'}{K} \sin \varphi' = o,$$

etc.

$$\frac{K^{n-1}}{K} Z(\varphi^{n-1}, \varkappa^{n-1} - \frac{K^n}{K} Z(\varphi^n, \varkappa^n) + \frac{\varkappa^{n-1} K^{n-1}}{K} \sin \varphi^{n-1} = o,$$

aus deren Addition die Gleichungen:

$$Z(\varphi, \varkappa) = \frac{K^n}{K} \cdot Z(\varphi^n, \varkappa^n) - \frac{1}{K} \cdot \sum_1^n \varkappa^{h-1} K^{h-1} \sin \varphi^{h-1},$$

XV'. $$Z(u, \varkappa) = \frac{K^n}{K} \cdot Z\left(\frac{K^n u}{2^n K}, \varkappa^n\right) - \sum_1^{n-1} \frac{\varkappa^h K^h}{K} s\left(\frac{K^h u}{2^h K}, \varkappa^h\right)$$

hervorgehn. Ich habe hier wie im Folgenden die Klammern bei den Indices fortgelassen.

Man kann in dieser Formel nicht geradezu $n = \infty$ setzen, weil man dann eine divergente Reihe erhalten würde.

Wenn man aber das 2. Glied der rechten Seite in die Form bringt:

$$-\sum_0^{n-1} \frac{\varkappa^h K^h}{K} \cdot s\left(\frac{K^h u}{2^h K}, \varkappa^h\right) = \Pi_n - \frac{\varkappa^n \varkappa^n K^n}{K} s\left(\frac{K^n u}{2^n K}, \varkappa^n\right),$$

und demgemäss für $\mu > o$

$$\Pi_\mu = \frac{\varkappa^\mu \varkappa^\mu K^\mu}{K} \cdot s\left(\frac{K^\mu u}{2^\mu K}, \varkappa^\mu\right) - \sum_0^{\mu-1} \frac{\varkappa^h \varkappa^h}{K} s\left(\frac{K^h u}{2^h K}, \varkappa^h\right)$$

setzt, während:

$$\Pi_0 = \varkappa \varkappa s(u, \varkappa),$$

ist, und:

$$\Pi_{\mu+1} - \Pi_\mu = \varkappa^{\mu+1} \varkappa^{\mu+1} \cdot \frac{K^{\mu+1}}{K} s\left(\frac{K^{\mu+1} u}{2^{\mu+1} K}, \varkappa^{\mu+1}\right) - \varkappa^\mu (1 + \varkappa^\mu) \frac{K^\mu}{K} s\left(\frac{K^\mu u}{2^\mu K}, \varkappa^\mu\right)$$

nach leichten Reduktionen in die Form:

$$\Pi_{\mu+1} - \Pi_\mu = \frac{2\varkappa^\mu K^\mu}{K} \cdot \left\{\frac{K_,^\mu}{K_,^{\mu+1}} s\left(\frac{K_,^{\mu+1} u}{K_,}, \varkappa^{\mu+1}\right) - \frac{K_,^{\mu+1}}{K_,^\mu} s\left(\frac{K_,^\mu u}{K_,}, \varkappa^\mu\right)\right\}$$

übergeht, so erhält man ohne Weiteres die elegante und convergente Formel:

$$Z(u, \varkappa) = \varkappa^2 s(u, \varkappa) + \sum_0^{n-1} \frac{2\varkappa^h K^h}{K} \cdot \left\{\frac{K_,^h}{K_,^{h+1}} \cdot s\left(\frac{K_,^{h+1} u}{K_,}, \varkappa^{h+1}\right) - \frac{K_,^{h+1}}{K_,^h} s\left(\frac{K_,^h u}{K_,}, \varkappa^h\right)\right\}$$
$$+ \frac{K^n}{K}\left\{Z\left(\frac{K_,^n u}{K_,}, \varkappa^n\right) - \varkappa^n \varkappa^n s\left(\frac{K_,^n u}{K_,}, \varkappa^n\right)\right\}.$$

Nun kann man, falls u einen solchen Werth hat, dass:

$$am\,(u, \varkappa) = \varphi$$

gesetzt

$$(\varkappa_,^n \operatorname{tang} \varphi^n)^2 = \left\{\varkappa_,^n \cdot \operatorname{tang} am \frac{K_,^n u}{K_,}\right\}^2$$

für ein gehörig grosses n vernachlässigt werden kann, für das letzte Glied auf der rechten Seite: $-\frac{\pi u}{2KK_{,}}$ setzen. Denn es ist:

$$Z\left(\frac{K_{,}^{n}}{K_{,}}u, \varkappa^{n}\right) = \mathcal{E}\left(\frac{K_{,}^{n}}{K_{,}}u, \varkappa^{n}\right) - \frac{K_{,}^{n}}{K_{,}}u \cdot \frac{E^{n}}{K^{n}},$$

und mit Berücksichtigung der Formeln VII'. und VIII'. erhält man:

$$\mathcal{E}\left(\frac{K_{,}^{n}}{K_{,}}u, \varkappa^{n}\right) = \int_{0}^{\frac{K_{,}^{n}}{K_{,}}u} \Delta^{2}\, am\,(\omega, \varkappa^{n})\, d\omega$$

$$= \int_{0}^{\frac{K_{,}^{n}}{K_{,}}u} \left\{ \varkappa_{,}^{n}\, \varkappa_{,}^{n} + \varkappa^{n}\, \varkappa^{n}\, c^{2}(\omega, \varkappa^{n}) \right\} d\omega,$$

$$\text{Lim}\quad c^{2}(\omega, \varkappa^{n}) = c(\omega, \varkappa^{n})\,\Delta(\omega, \varkappa^{n}) \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \varkappa_{,}^{n}\, \varkappa_{,}^{n}\, \text{tang}^{2}\, am\, \omega}} \right\}$$

$$= \frac{d\, s\,(\omega, \varkappa^{n})}{d\omega}$$

$$\text{Lim}\ \frac{K^{n}}{K}\left(Z\left(\frac{K_{,}^{n}}{K_{,}}u, \varkappa^{n}\right) - \varkappa^{n}\varkappa^{n}\, s\left(\frac{K_{,}^{n}}{K_{,}}u, \varkappa^{n}\right)\right) = -\frac{K_{,}^{n}}{K_{,}}u \cdot \frac{E^{n}}{K^{n}},$$

und daher endlich folgende Entwicklung:

XVI'.

$$Z(u, \varkappa) =$$

$$= \frac{\pi u}{2KK_{,}} + \varkappa^{2}\, s\,(u, \varkappa) + \sum_{0}^{\infty} 2^{h+1}\, \varkappa^{h}\, \frac{K_{,}^{h}}{K_{,}} \left\{ \frac{K_{,}^{h}}{K_{,}^{h+1}}\, s\left(\frac{K_{,}^{h+1}}{K_{,}}u, \varkappa^{h+1}\right) - \frac{K_{,}^{h+1}}{K_{,}^{h}}\, s\left(\frac{K_{,}^{h}}{K_{,}}u, \varkappa^{h}\right) \right\}.$$

Dass die Reihe auf der rechten Seite convergirt, kann noch nachträglich dadurch erkannt werden, dass das allgemeine Glied des endlichen Ausdrucks:

$$= 2\,\varkappa^{n-1} K^{n-1} \cdot \left\{ \frac{K_{,}^{n-1}}{K_{,}^{n}} \cdot \sin\varphi^{n} - \frac{K_{,}^{n}}{K_{,}^{n-1}} \cdot \sin\varphi^{n-1} \right\}$$

von der Ordnung der vernachlässigten Grössen ist. In der That, setzt man:

$$\sin\varphi^{n-1} = \frac{K_{,}^{n}}{K_{,}^{n-1}} \sin\varphi^{n} \cdot \frac{\cos\varphi^{n}}{\Delta(\varphi^{n}, \varkappa^{n})}$$

so sieht man, dass bis auf die zu vernachlässigenden Grössen:

$$\sin\varphi^{n-1} = \frac{K_{,}^{n}}{K_{,}^{n-1}} \sin\varphi^{n}$$

wird, also das genannte Glied in folgendes übergeht:

$$= \frac{2\,\varkappa^{n-1}\, K^{n-1}\, K_{,}^{n-1}}{K_{,}^{n}} \left(1 - \frac{K_{,}^{n}\, K_{,}^{n}}{K_{,}^{n-1}\, K_{,}^{n-1}}\right) \sin\varphi^{n},$$

$$= \frac{2\,\varkappa^{n-1}\, K^{n-1}\, K_{,}^{n-1}}{K_{,}} \left(1 - \frac{\varkappa^{n-1}}{\varkappa^{n}\,\varkappa^{n}}\right) \sin\varphi^{n},$$

$$= 2\,\varkappa^{n-1}\, \frac{K^{n-1}\, K_{,}^{n-1}}{K_{,}^{n}}\; \frac{\varkappa_{,}^{n}}{1 + \varkappa_{,}^{n}} \sin\varphi^{n},$$

$$= \frac{(\varkappa^{n})^{4}}{\sqrt{\varkappa^{n-1}}}\; \frac{K^{n}\, \varkappa_{,}^{n}}{1 + \varkappa_{,}^{n}} \sin\varphi^{n},$$

welches eine zu vernachlässigende Grösse ist. —

Um die von Legendre im Cap. XXI. angegebenen Näherungsformeln für:

$$E(\varphi\,,\varkappa),\ \text{und}\ E$$

zu erhalten, darf man nur diese Gleichung nach u differentiiren und dann $u = o$ setzen, um zur Reihe:

$$1 - \frac{E}{K} = \varkappa^2 - \frac{\pi}{2KK_,} + \sum_0^\infty \frac{2^{h+1}\varkappa^h K_,^h}{K_,} \cdot \left\{ \frac{K_,^h}{K_,} - \frac{K_,^{h+1}}{K_,} \right\}$$

zu gelangen. Multiplicirt man diese Gleichung mit u und zieht sie von der vorigen ab, so erhält man, indem man wieder die Argumente φ^n einführt, also:

$$s\left(\frac{K_,^h}{K_,}\,u\,,\varkappa^h\right) = \sin\varphi^n$$

setzt, die folgenden beiden Näherungsformeln für das elliptische Integral zweiter Gattung:

$$\mathrm{E}(\varphi\,,\varkappa) = \mathrm{F}(\varphi\,,\varkappa)\,.\left\{\varkappa_,^2 + \sum_0^\infty \frac{2^{h+1}\varkappa^h K_,^h}{K_,}\,.\left\{\frac{K_,^{h+1}}{K_,} - \frac{K_,^h}{K_,}\right\}\right\}$$

$$+ \varkappa^2\sin\varphi + \sum_0^\infty \frac{2^{h+1}\varkappa^h K_,^h}{K_,}\left\{\frac{K_,^h}{K_,^{h+1}}\sin\varphi^{h+1} - \frac{K_,^{h+1}}{K_,^h}\sin\varphi^h\right\},$$

und:

$$\mathrm{E} = \frac{\pi}{2K_,} + K\left(\varkappa_,^2 + \sum_0^\infty \frac{2^{h+1}\varkappa^h K_,^h}{K_,}\,.\left\{\frac{K_,^{h+1}}{K_,} - \frac{K_,^h}{K_,}\right\}\right).$$

Um die Uebereinstimmung mit den von Legendre gefundenen zwei Näherungsformeln zu erkennen, darf man nur zu den schon in meinem ersten Briefe angeführten sich von selbst ergebenden Relationen zwischen Moduln und ganzen Integralen erster Gattung der Landenschen Transformation noch folgende hinzunehmen:

$$(1+\varkappa)^2 = \frac{4\varkappa}{\varkappa'\varkappa'} = \left(\frac{K'}{K}\right)^2 = \left(\frac{2K_,'}{K_,}\right)^2 = \frac{\varkappa_,\varkappa_,}{\varkappa_,'} = \frac{4}{(1+\varkappa_,')^2},$$

etc.

$$\frac{2^h\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\varkappa'\varkappa''\,\varkappa^h}\sqrt{\varkappa^h}} = \frac{K^h}{K} = \frac{2^h K_,^h}{K_,} = \frac{\varkappa_,\sqrt{\varkappa_,'\varkappa_,''\ldots\varkappa_,^{h-1}\varkappa_,^h}}{\varkappa_,^h}.$$

Substituirt man dieselben in die vorigen allgemeinen Glieder, so werden dieselben:

$$\frac{2^{h+1}\varkappa^h K_,^h}{K_,}\,.\left\{\frac{K_,^{h+1}}{K_,} - \frac{K_,^h}{K_,}\right\} = -\sqrt{\varkappa}\,\varkappa_,\sqrt{\frac{\varkappa_,'\varkappa_,''\ldots\varkappa_,^{h+1}}{\varkappa'\varkappa''\ldots\varkappa^{h-1}}},$$

und:

$$\frac{2^{h+1}\varkappa^h K_,^h}{K_,}\,.\left\{\frac{K_,^h}{K_,^{h+1}}\sin\varphi^{n+1} - \frac{K_,^{h+1}}{K_,}\sin\varphi^h\right\}$$

$$= \frac{2^{h+1}\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\varkappa'\varkappa''\ldots\varkappa^h}}\left\{\varkappa^{h+1}\sin\varphi^{h+1} - \frac{\varkappa^h}{\varkappa^{h+1}}\sin\varphi^h\right\}.$$

Führt man daher die von Legendre benutzten Bezeichnungen ein:

$$\mathrm{L}_h = \varkappa_,^2 - \varkappa\,\varkappa_,\left\{\sqrt{\varkappa_,'} + \sqrt{\varkappa_,'\varkappa_,'} + \sqrt{\frac{\varkappa_,'\varkappa_,''\varkappa_,'''}{\varkappa'}} + \ldots + \sqrt{\frac{\varkappa_,'\varkappa_,''\ldots\varkappa_,^{h+1}}{\varkappa'\varkappa''\ldots\varkappa^{h-1}}}\right\},$$

$$\Psi_h = \varkappa\sin\varphi + \frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\,.\,(\varkappa'\sin\varphi' - \frac{\varkappa}{\varkappa'}\sin\varphi) + \text{etc.} + \frac{2^h}{\sqrt{\varkappa\varkappa'\ldots\varkappa^{h-1}}}\left\{\varkappa^h\sin\varphi^h - \frac{\varkappa^{h-1}}{\varkappa^h}\sin\varphi^{h-1}\right\},$$

$$K^1 = \mathrm{Lim}\sqrt{\frac{\varkappa'\varkappa''\,.\,\varkappa^n}{\varkappa}} = \mathrm{Lim}\frac{2^n K}{\sqrt{\varkappa^h}\,K^n} = \mathrm{Lim}\frac{2^n K}{K^n} = \mathrm{Lim}\frac{K_,}{K_,^n} = \frac{2K_,}{\pi},$$

so erhält man die 4 Legendreschen Näherungsausdrücke für die elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung in seiner Bezeichnung:

$$K = K' \operatorname{Lim} \frac{\log \frac{4}{\varkappa_{,}^{n}}}{2^{n}} ,$$

$$F(\varphi, \varkappa) = K' \operatorname{Lim} \log \operatorname{tang} \frac{\pi + 2\varphi^{n}}{4} ,$$

$$E(\varphi, \varkappa) = K' \operatorname{Lim} L_n \log \operatorname{tang} \frac{\pi + 2\varphi^{n}}{4} + \varkappa \operatorname{Lim} \psi_n ,$$

$$E = K' \operatorname{Lim} \frac{L_n}{2^n} \cdot \log \frac{4}{\varkappa_{,}^{n}} + \frac{1}{K'} .$$

Ausser diesen Annäherungsformeln hat Legendre *a. a. O.* zwei andre mittelst verkleinerter Moduln der Landenschen Transformation aufgestellt, welche ich ebenfalls aus der Formel VI'. ableiten will. Setzt man darin:

für	$\varkappa'$	$\varkappa$,
„	$\varkappa$	$\varkappa^0$,
„	K'	K ,
„	K	K^0 ,
„	φ'	φ ,
„	φ	φ^0 ,

so dass die Formeln:

$$\sin \varphi^0 = (1 + \varkappa_{,}) \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa)} ,$$

$$\cos \varphi^0 = \frac{1 - (1 + \varkappa_{,}) \sin^2 \varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa)} ,$$

$$\Delta(\varphi^0, \varkappa^0) = \frac{1 - (1 - \varkappa_{,}) \sin^2 \varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa)} ,$$

$$\operatorname{tang}(\varphi^0 - \varphi) = \varkappa_{,} \operatorname{tang} \varphi ,$$

$$\varphi = am(u, \varkappa) ,$$

$$\varphi^0 = am\left(\frac{2K^0}{K} u, \varkappa^0\right) = am\left(\frac{K_{,}^0}{K} u, \varkappa^0\right)$$

gelten, so geht zugleich die Gleichung VI'. in die folgende:

$$\mathrm{Z}(\varphi, \varkappa) - \frac{K^0}{K} \cdot \mathrm{Z}(\varphi^0, \varkappa^0) = \frac{\varkappa^0 K^0}{K} \sin \varphi^0 ,$$

oder, was dasselbe ist, in:

$$\mathrm{Z}(u, \varkappa) = \frac{K^0}{K} \mathrm{Z}\left(\frac{2K^0}{K} u, \varkappa^0\right) = \frac{\varkappa^0 K^0}{K} s\left(\frac{2K^0}{K} u, \varkappa^0\right)$$

über. Diese Gleichungen können fortgesetzt werden, indem die folgende Bezeichnung benutzt wird, wonach die successive durch diese umgekehrte Landensche Transformation verkleinerten Moduln, Argumente und ganze Integrale durch:

$$\varkappa^0 \quad \varkappa^{00} \quad . \; . \quad \varkappa^{n.0}$$
$$\varphi^0 \quad \varphi^{00} \quad . \; . \quad \varphi^{n.0}$$
$$K^0 \quad K^{00} \quad . \; . \quad K^{n.0}$$

bezeichnet werden, so dass man die den obigen analogen Ausdrücke findet:

$$\frac{2\sqrt{\varkappa^0}}{\varkappa} = \frac{K}{K^0} = \frac{2K_{,}}{K_{,}^0} = \frac{\varkappa_{,}^0}{\sqrt{\varkappa_{,}}} ,$$

$$\frac{2^n}{\varkappa} \cdot \sqrt{\frac{\varkappa^{n.0}}{\varkappa^0 \varkappa^{00} \ldots \varkappa^{(n-1)0}}} = \frac{K}{K^{n.0}} = \frac{2^h K_{,}}{K_{,}^{n.0}} = \sqrt{\frac{\varkappa_{,}^0 \varkappa_{,}^{00} \ldots \varkappa_{,}^{(n-1)0}}{\varkappa_{,}}} \cdot \varkappa_{,}^{n.0} .$$

Hienach erhält man:

$$Z(\varphi, \varkappa) =$$

$$\frac{K^{n.o}}{K} \cdot Z(\varphi^{n.o}, \varkappa^{n.o}) + \frac{\varkappa^{o} K^{o}}{K} \cdot \sin \varphi^{o} + \frac{\varkappa^{oo} K^{oo}}{K} \sin \varphi^{oo} + \ldots \frac{\varkappa^{n.o} K^{n.o}}{K} \sin \varphi^{n.o},$$

und durch elliptische Funktionen ausgedrückt:

XVII'. $$Z(u, \varkappa) = \frac{K^{n.o}}{K} \cdot Z\left(\frac{2^n K^{n.o}}{K} u, \varkappa^{n.o}\right) + \sum_1^n \frac{\varkappa^{h.o} K^{h.o}}{K} \sin\left(\frac{2^h K^{h.o}}{K} u, \varkappa^{h.o}\right).$$

Diese Formeln hat Jacobi in den Fundamenten pag. 134 durch die unendlichen Reihen für:

$Z(u, \varkappa)$ und $s(u, \varkappa)$

abgeleitet. Man kann daher auch umgekehrt aus der letzteren und der gefundenen Entwicklung für $s(u, \varkappa)$ die Entwicklung für $Z(u, \varkappa)$ ableiten, und ebenso die vorhin gefundene Formel für $Z(u, \varkappa)$ behandeln.

Sie stimmen mir aber wohl ohne Weiteres darin bei, dass diese Behandlungsart der Landenschen Transformation zur Entwicklung der genannten Funktion von der von mir gegebenen wesentlich abweicht. —

In der That haben wir die Reihenentwicklung gehabt:

$$\frac{2\varkappa K}{\pi} \cdot s\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = 4 \sum_1^\infty \frac{q^{\frac{2\lambda-1}{2}} \sin(2\lambda-1)x}{1-q^{2\lambda-1}},$$

also auch, indem für $\varkappa$: $\varkappa^{o}$ gesetzt:

$$q = e^{\frac{-\pi K_{,}}{K}} \text{ in } q^2$$

übergeht:

$$\frac{2\varkappa^{h.o} K^{h.o}}{\pi} \cdot s\left(\frac{2^h K^{h.o} x}{\pi}, \varkappa^{h.o}\right) = 4 \sum_1^\infty \frac{q^{\frac{2\lambda-1}{2} 2^h}}{1-q^{(2\lambda-1)2^h}} \sin(2\lambda-1)\, 2^h x.$$

Multiplicirt man daher die Gleichung mit:

$$\frac{2K}{\pi},$$

und setzt $n = \infty$, wofür:

$$\text{Lim } K^{n.o} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{Lim } Z(\varphi^n, \varkappa^n) = o$$

wird, so erhält man durch Benutzung des eben gefundenen Ausdrucks, wenn man:

$$u = \frac{2Kx}{\pi}$$

setzt:

$$\frac{2K}{\pi} \cdot Z\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = 4 \sum_1^\infty \lambda \sum_1^\infty h \frac{q^{\frac{2\lambda-1}{2} 2^h}}{1-q^{(2\lambda-1)2^h}} \sin(2\lambda-1)\, 2^h x.$$

Kehrt man hier die Reihenfolge der Summation um und summirt:

$$4 \sum_1^\infty \lambda \frac{q^{\frac{2\lambda-1}{2} 2^h} \sin(2\lambda-1) 2^h x}{1-q^{(2\lambda-1)2^h}} = \frac{4 q^{2^h} (1-q^{2^{h+1}}) \sin 2^h x}{1 - 2q^{2^{h+1}} \cos 2^{h+1} x + q^{2^{h+2}}},$$

so findet man die schöne Entwicklung:

$$\frac{2K}{\pi} Z\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = 4 \sum_1^\infty \frac{q^{2^h} (1-q^{2^{h+1}}) \sin 2^h x}{1 - 2q^{2^{h+1}} \cos 2^{h+1} x + q^{2^{h+2}}},$$

welche der Landenschen Transformation eigenthümlich ist, und mit derjenigen Entwicklung von:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2K x}{\pi}, \varkappa\right)}{\Theta(o, \varkappa)}$$

in ein analoges unendliches Produkt im genausten Zusammenhang steht, welche in den Fundamenten pag. 150 umgekehrt durch das unendliche Produkt für:

$$\Delta\, am\,(u, \varkappa)$$

abgeleitet ist.

Bevor ich dieselbe im Zusammenhang mit der Anwendung der Landenschen Transformation auf die Transcendenten:

$$\int_0^u Z(u, \varkappa)\, du = X(u, \varkappa),$$

und:

$$\Theta(u, \varkappa) = e^{X(u, \varkappa)}$$

angebe, will ich noch vorübergehend bemerken, dass die Gleichung XVII'., ähnlich behandelt, wie die Gleichung XVI'., zu den bekannten von Legendre gegebenen Näherungsformeln:

$$E(\varphi, \varkappa) =$$

$$\text{Lim} \sqrt{\frac{\varkappa_,^0\, \varkappa_,^{00}\; \varkappa_,^{n.o}}{\varkappa_,}} \left\{ 1 - \frac{\varkappa^2}{2}\left(1 + \frac{\varkappa^0}{2} + \frac{\varkappa^0 \varkappa^{00}}{4} + + \frac{\varkappa^0 \varkappa^{00} \varkappa^{n.o}}{2^n}\right) \frac{\varphi^{n.o}}{2^n} \right\}$$

$$+ \varkappa \left\{ \frac{\sqrt{\varkappa^0}}{2} \sin \varphi^0 + \frac{\sqrt{\varkappa^0 \varkappa^{00}}}{4} \sin \varphi^{00} \ldots + \frac{\sqrt{\varkappa^0 \varkappa^{00} \varkappa^{n.o}}}{2^n} \sin \varphi^{n.o} \right\}$$

$$E = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\varkappa_,^0\, \varkappa_,^{00}\; \varkappa_,^{n.o}}{\varkappa_,}} \cdot \left\{ 1 - \frac{\varkappa^2}{2}\left(1 + \frac{\varkappa^0}{2} + \frac{\varkappa^{00}}{4} + \ldots + \frac{\varkappa^0 \varkappa^{00}\; \varkappa^{n.o}}{2^n}\right)\right\}$$

führt.

Wenn man sich die Frage vorlegt, was Legendre gehindert hat aus diesen an sich so vortrefflichen Anwendungen der Landenschen Transformation die Theorie der elliptischen Funktionen abzuleiten, so glaube ich durch das, was ich Ihnen, verehrter Freund, in diesem Briefe bisher mitgetheilt habe, dieselbe dahin beantwortet zu finden: Nicht allein darin ist der Grund dieser merkwürdigen Thatsache zu suchen, dass der grosse Mathematiker nicht auf die Idee gekommen ist, das elliptische Integral erster Gattung ebenso wie das auf die trigonometrischen Funktionen führende, umzukehren, auch nicht darin allein, dass er die von ihm zuerst gefundene Transformation, welche auf die Fundamentalformel:

$$s(iu, \varkappa) = i \operatorname{tang} am\,(u, \varkappa)$$

führt, nicht weiter verfolgt hat, sondern es scheint mir wohl die Annahme vertheidigt werden zu können, dass, wenn er statt des Integrals zweiter Gattung die Z Funktion eingeführt hätte, die ganze Theorie sich ihm von selbst eröffnet haben würde. —

Lassen Sie uns nun zu den obengenannten Funktionen übergehn.

Wenn man in der obigen Gleichung VI'., die schon in meinem ersten Brief benutzte Formel:

$$\frac{2 \varkappa K \sin \varphi}{K'} = - \frac{d\, \Delta(\varphi', \varkappa')}{d\varphi'}:$$

einführt, so geht jene Gleichung VI'. in folgende über:

$$Z(\varphi', \varkappa') = \frac{K}{K'}(\varphi, \varkappa) - \tfrac{1}{2} \frac{d\, \Delta(\varphi', \varkappa')}{d\varphi'},$$

oder, was dasselbe ist, in folgende:

$$Z\left(\frac{K'}{2K}u, \varkappa'\right) = \frac{K}{K'} Z(u, \varkappa) - \frac{d\varDelta\left(\frac{K'}{2K}u, \varkappa'\right)}{2d\,am\left(\frac{K'}{2K}u, \varkappa'\right)},$$

$$\frac{K'}{K} Z\left(\frac{K'}{2K}u, \varkappa'\right) = Z(u, \varkappa) - \frac{d\log\varDelta\left(\frac{K'}{2K}u, \varkappa'\right)}{du}.$$

Diese unmittelbar aus der Landenschen Transformation folgende Gleichung führt, durch Integration von o an, auf die folgende:

$$2X\left(\frac{K'}{2K}u, \varkappa'\right) = \chi(u, \varkappa) - \log\varDelta\left(\frac{K'}{2K}u, \varkappa'\right),$$

oder für: $\frac{K'u}{2K}$ u,
„ $\varkappa'$ $\varkappa$,
„ $\varkappa$ $\varkappa^0$,

gesetzt:

$$X(u, \varkappa) = \tfrac{1}{2} X\left(\frac{2K^0}{K}u, \varkappa^0\right) - \tfrac{1}{2}\log\varDelta(u, \varkappa).$$

Aus beiden Formeln fliessen folgende:

$$\left(\frac{\Theta(u, \varkappa)}{\Theta(o, \varkappa)}\right)^2 = \left(\frac{\Theta\left(\frac{K'}{2K}u, \varkappa'\right)}{\Theta(o, \varkappa')}\right)\varDelta\left(\frac{K'}{2K}u, \varkappa'\right),$$

$$\left(\frac{\Theta(u, \varkappa)}{\Theta(o, \varkappa)}\right) = \sqrt{\frac{\Theta\left(\frac{2K^0}{K}u, \varkappa^0\right)}{\Theta(o, \varkappa^0)\varDelta(u, \varkappa)}},$$

welche ebenso wie die vorigen sich fortsetzen lassen und auf die Entwicklungen führen:

$$X(u, \varkappa) = \frac{1}{2^n}\cdot X\left(\frac{2^n K^{n.o}}{K}u, \varkappa^{n.o}\right) - \sum_0^{n-1}\frac{1}{2^{h+1}}\cdot\log\varDelta\left(\frac{2^h K^{h.o}}{K}u, \varkappa^{h.o}\right),$$

$$\frac{\Theta(u, \varkappa)}{\Theta(o, \varkappa)} = \sqrt[2^n]{\Theta\left(\frac{2^n K^{n.o}}{K}u, \varkappa^{n.o}\right)}(\varDelta u, \varkappa)^{-\frac{1}{2}}\left(\varDelta\frac{2K^0}{K}u, \varkappa^0\right)^{-\frac{1}{4}}\cdots\varDelta\left(\frac{2^{n-1}K^{(n-1)o}}{K}u, \varkappa^{(n-1)o}\right).$$

Es ist natürlich im Ganzen völlig gleichgültig, welche der drei Transcendenten

$$Z(u, \varkappa), \quad X(u, \varkappa), \quad \Theta(u, \varkappa)$$

man aus den genannten Formeln, $n = \infty$ gesetzt, entwickelt, da die andern beiden durch Differentiation oder Integration aus ihr folgen. Nehme ich die letzte, so giebt die Einführung von:

$$u = \frac{2Kx}{\pi},$$

und die Anwendung des unendlichen Produkts für:

$$\varDelta\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right), \quad \varDelta\left(\frac{4K^0x}{\pi}, \varkappa^0\right)$$

etc.

$$\varDelta\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = \sqrt{\varkappa,}\ \prod_1^\infty\frac{(1 + 2q^{2h-1}\cos 2x + q^{4h-2})}{(1 - 2q^{2h-1}\cos 2x + q^{4h-2})},$$

etc.

so wie die folgende Zerlegung der darin vorkommenden Ausdrücke:

$$\Pi\,(1-2q^{4h-2}\cos 4x+q^{8h-4}) =$$
$$\Pi\,(1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2})\,(1+2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2})$$
$$\Pi\,(1-2q^{8h-2}\cos 8x+q^{16h-8}) =$$
$$\Pi\,(1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2})\;\Pi\,(1+2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2})\;\Pi\,(1+2q^{4h-2}\cos 2x+q^{8h-2})$$

etc., die Entwicklung von:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)}{\Theta\,(o, \varkappa)}$$

in ein unendliches Produkt.

In der That kommt in dem Produkt:

$$\left(\Delta\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)\right)^{1/2}\left(\Delta\left(\frac{4K^0x}{\pi}, \varkappa^0\right)\right)^{1/4}\left(\Delta\left(\frac{8K^{00}x}{\pi}, \varkappa^{00}\right)\right)^{1/8}\ldots$$

der Faktor:

$$\Pi\,(1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2}),$$

da:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\text{etc.} \qquad = 1,$$

einmal, der Faktor:

$$\Pi\,(1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2}),$$

da:

$$1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4} \qquad = o,$$

keinmal, der Faktor:

$$\Pi\,(1+2q^{4h-2}\cos 2x+q^{4h-2}),$$

da:

$$\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{16} \qquad = o,$$

keinmal vor etc., es geht daher die Entwicklung:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)}{\Theta\,(o, \varkappa)} = \frac{\Pi\,(1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2})}{\varkappa_,^{1/4}\,(\varkappa_,^0)^{1/8}\,(\varkappa_,^{00})^{1/16}\ldots}$$

hervor. Setzt man links und rechts $x = o$, so erhält man:

$$\varkappa_,^{1/4}\,(\varkappa_,^0)^{1/8}\,(\varkappa_,^{00})^{1/16}\ldots = \Pi\,(1-q^{2h-1})^2,$$

und daher:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)}{\Theta\,(o, \varkappa)} = \frac{\Pi\,(1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2})}{\Pi\,(1-q^{2h-1})^2}.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen, so erhält man:

$$X\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = \sum_1^\infty \log\frac{(1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2})}{(1-q^{2h-1})^2}$$

und durch ein- und zweimalige Differentiation die oben schon gefundenen Entwicklungen von:

$$Z\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right), \qquad \Delta^2\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)$$

in Partialbrüche. —

Auch bei der Bestimmung des Werthes:

$$\Theta\,(o, \varkappa),$$

bei der Annahme:

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right) = 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-\ldots,$$

zu der die Entwicklung des Produktes:

$$\Pi\,(1 - 2q^{2h-1}\cos 2x + q^{4h-2})$$

berechtigt, kann die Landensche Transformation benutzt werden.

Man sieht nämlich sofort ein, dass:

$$\frac{\sqrt{\varkappa_{,}}}{\Delta\left(\frac{2Kx}{\pi},\varkappa\right)} = \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi},\varkappa\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}+K,\varkappa\right)},$$

also:

$$\sqrt{\varkappa_{,}} = \frac{\Theta(o,\varkappa)}{\Theta(K,\varkappa)}$$

erhalten wird. —

Es sei nun:

$$\Theta(K,\varkappa) = f(q),$$

dann ist offenbar:

$$\Theta(o,\varkappa) = f(-q),$$

$$\frac{f(-q)}{f(q)} = \sqrt{\varkappa_{,}},$$

und daher

$$\frac{1+\sqrt{\varkappa_{,}}}{2} = \frac{f(q^4)}{f(q)}.$$

Andrerseits aber folgt aus den obigen Formeln:

$$\sqrt{\frac{K^{00}}{K}} = \sqrt[4]{\frac{\varkappa_{,}}{\varkappa_{,}^{0}\,\varkappa_{,}^{00}\,\varkappa_{,}^{00}}}.$$

Da nun:

$$\varkappa_{,}^{00}\,\varkappa_{,}^{00} = \frac{4\varkappa_{,}^{0}}{(1+\varkappa_{,}^{0})^2},$$

$$\varkappa_{,}^{0}\,\varkappa_{,}^{0} = \frac{4\varkappa_{,}}{(1+\varkappa_{,})^2},$$

ist, so erhält man:

$$\sqrt{\frac{K^{00}}{K^{0}}} = \sqrt{(1+\varkappa_{,}^{0})(1+\varkappa_{,})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{\varkappa_{,}^{0}}}{2},$$

daher endlich auch:

$$\sqrt{\frac{K}{K^{00}}} = \frac{f(q)}{f(q^4)}.$$

Setzt man diese Gleichung fort und multiplicirt die daraus entstehenden, so erhält man, da

$$\text{Lim}\; K^{2^n \cdot o} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{Lim}\; f(q^{2^n}) = 1$$

ist:

$$f(q) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$$

$$\Theta(o,q) = f(-q) = \sqrt{\varkappa_{,}}\, f(q) = \sqrt{\frac{2\varkappa_{,}K}{\pi}},$$

welches der von Jacobi auf andre Weise fund. pag. 179 gefundene Werth ist, woraus sich vermittelst der früher gefundenen Formel:

$$\sqrt{\frac{2\varkappa, K}{\pi}} = \Pi \frac{1-q^h}{1+q^h} = \Pi (1-q^{2h-1})^2 (1-q^{2h})$$

die definitive Entwicklung:

$$\Pi (1-q^{2h}) \, \Pi (1 - 2 q^{2h-1} \cos 2x + q^{4h-2}) = \Theta \left(\frac{2Kx}{\pi}, \varkappa\right)$$

ergiebt.

Ich habe diese Entwicklungen hier reproducirt, um wieder darauf hinzuweisen, wie meine ursprüngliche Anwendung der Landenschen Transformation, welche von den Gleichungen I'. und II'. ausgeht, direkt zu demselben Ziele geführt hat.

Ich will dabei noch den letztern analoge Transformations-Gleichungen für die Funktionen:

$$X(u) \text{ und } \Theta(u)$$

angeben, wie man sie leicht durch Integration dieser Gleichungen findet:

$$X(u,\varkappa) = X\left(\frac{K'}{2K} u, \varkappa'\right) + X\left(K' - \frac{K'}{2K} u, \varkappa'\right) - X(K_,' \varkappa'),$$

$$\varkappa \int_0^u s(u,\varkappa)\, du = X\left(\frac{K'}{2K} u, \varkappa'\right) - X\left(K' - \frac{K'}{2K} u, \varkappa'\right) + X(K_,' \varkappa').$$

Wir haben nun:

$$\int_0^u s(u,\varkappa)\, du = -\frac{1}{\varkappa} \log \Delta\left(\frac{2K'}{K} u, \varkappa'\right)$$

gefunden, eine Formel, welche beiläufig auch unmittelbar den Uebergang von den unendlichen Produkten zu den Reihen in Partialbrüchen vermittelst der Landenschen Transformation gewährt.

Hienach wird die zweite Gleichung:

$$\frac{1}{\varkappa} \log \Delta \, am \left(\frac{2K'}{K} u, \varkappa'\right) = -X\left(\frac{K'}{2K} u, \varkappa'\right) + X\left(K' - \frac{K'}{2K} u, \varkappa'\right) - X(K', \varkappa').$$

Setzt man in ihr:

$$u = K,$$

so erhält man:

$$\frac{1}{\varkappa} \log \varkappa_,' = - X(K_,' \varkappa'),$$

so dass man aus der erstern der beiden Gleichungen:

$$X(u,\varkappa) = X\left(\frac{K'}{2K} u, \varkappa'\right) + X\left(K' - \frac{K'}{2K} u, \varkappa'\right) + \log \varkappa_,',$$

$$\frac{\Theta(u,\varkappa)}{\Theta(o,\varkappa)} = \varkappa_,' \frac{\left(\Theta \frac{K'}{2K} u, \varkappa'\right) \cdot \Theta\left(K' - \frac{K'}{2K} u, \varkappa'\right)}{\Theta(o,\varkappa')\, \Theta(K_,' \varkappa')},$$

also auch:

$$\frac{\Theta\left(\frac{2K^0}{K}, \varkappa^0\right)}{\Theta(o,\varkappa^0)} = \varkappa_, \frac{\Theta(u,\varkappa) \cdot \Theta(K-u,\varkappa)}{\Theta(o,\varkappa)\;\; \Theta(K,\varkappa)},$$

folgt; führt man hierin die Werthe:

$$\Theta(o,\varkappa) = \sqrt{\frac{2\varkappa, K}{\pi}}$$

$$\Theta(K,\varkappa) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$$

ein, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\Theta\left(\frac{2K^0}{K}u, \varkappa^0\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\sqrt{\varkappa_,^0 K^0}}{K}\,\sqrt{\varkappa_,}\;\Theta(u, \varkappa)\,.\,\Theta(K-u, \varkappa)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sqrt[4]{\frac{\varkappa_,^3}{KK}}\;.\;\Theta(u, \varkappa)\,.\,\Theta(K-u, \varkappa)\,.$$

Also auch umgekehrt:

$$\Theta(u, \varkappa) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sqrt[4]{\frac{(\varkappa_,')^3}{K'K'}}\;.\;\Theta\left(\frac{K'}{2K}u, \varkappa'\right)\,\Theta\left(K' - \frac{K'}{2K}u, \varkappa'\right)\,.$$

Man kann offenbar diese beiden Gleichungen unmittelbar fortsetzen, und so die Transformation der Funktion $\Theta(u, \varkappa)$ von der Ordnung 2^n so wie die Zerlegung derselben Funktion $\Theta(u, \varkappa)$ in ein unendliches Produkt sofort daraus ableiten. Es ist doch höchst auffallend, dass Legendre auch nicht später nachdem ihm Jacobi seine Transformation mitgetheilt hatte, auf diese Behandlung der Landenschen gekommen zu sein scheint. Im dritten Bande seines v. g. Werks, welcher mit den Fundamenten in demselben Jahr, aber etwas früher herauskam, hat der damals schon 79jährige Veteran, Jacobi's und Abel's Ideen in der Theorie weitläuftig auseinandergesetzt, und durch eigene Untersuchungen fortzusetzen, so wie auch namentlich die Beziehungen derselben zu seinen frühern Arbeiten aufzudecken gesucht. Es wird dabei auch an verschiedenen Stellen der Landenschen Transformation erwähnt, namentlich in den Nummern 42—45, 137—140, 147, 165—167, 195—196, aber nirgend finde ich auch nur eine Andeutung davon, wie aus dieser Transformation allein die ganze Entwicklung der elliptischen Funktionen abzuleiten sei.

Das Integral dritter Gattung wird durch die Gleichung:

$$\int_0^u \varDelta^2\,\mathrm{am}\,(u-a)\,du - \int_0^u \varDelta^2\,\mathrm{am}\,(u+a)\,du = \frac{2\varkappa^2\; sa\;ca\;\varDelta a\;su\;cu\;\varDelta u}{1-\varkappa^2\,s^2a\,s^2u} = 2\,\frac{d\,\Pi(u, a)}{du}\,,$$

welche einerseits aus dem Additionstheorem folgt, und andrerseits auf die Jakobische Grundformel:

$$\Pi(u, a) = u\,\mathrm{Z}\,a + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

führt, in den Kreis der von mir gemachten Mittheilungen hineingezogen.

Man kann jedoch auch direkt aus der Landenschen Transformation die schöne Gleichung ableiten:

$$\Pi(u, a, \varkappa) = \Pi\left(\frac{K'}{2K}u, \frac{K'}{2K}a, \varkappa'\right) + \Pi\left(K' - \frac{K'}{2K}u, K' - \frac{K'}{2K}a, \varkappa'\right)\,,$$

welche für die Transformation der $n$ten Ordnung von Jacobi für ein ungerades n und seinem Schüler Sanio für ein gerades respektive im 4ten und 14ten Bande des Crelleschen Journals zuerst in allgemeinster Form aufgestellt ist. —

In der That folgt aus den am Anfang dieses Briefs angegebenen Formeln:

$$\varDelta^2(\varphi, \varkappa) - \frac{E}{K} = \frac{K'K'}{4KK}\left(\varDelta^2(\varphi'\,\varkappa') + \varDelta^2(\psi_,'\,\varkappa')\right) - 2\,\frac{E'}{K'}\,,$$

oder was dasselbe ist, die erste Gleichung III'.

Aus derselben ergiebt sich aber die Gleichung:

$$\varDelta^2(u-a, \varkappa) - \varDelta^2(u+a\;\varkappa) =$$

$$\frac{K'K'}{4KK}\left\{\varDelta^2\left(\frac{2K'}{K}(u-a)\right) - \varDelta^2\left(\frac{2K'}{K}(u+a)\right) + \varDelta^2\left(\frac{2K'}{K}(u-a) - K'\right) - \varDelta^2\left(\frac{2K'}{K}(u+a) - K'\right)\right\}\,,$$

$$(\mathrm{mod}\;\varkappa')$$

und wenn man dieselbe zweimal von o bis u integrirt, die obige Gleichung, welche die Eigenschaft besitzt, fortgesetzt werden zu können, und daher auch direkt auf die Reihenentwicklung von $\Pi\,(u\,,\,a\,,\varkappa)$ führt. —

Ich gehe jetzt auf den weitern und Hauptgegenstand Ihres zweiten Schreibens etwas näher ein, worin Sie die Gaussische Transformation zu demselben Zwecke wie ich die Landensche angewandt haben.

Ich will durchaus nicht in Abrede stellen, wie die erstere ebenso dazu berechtigt ist, als die letztere die Entwicklungen der elliptischen zwölf Grundfunktionen zu geben, allein dann giebt es noch vier andere Transformationen der zweiten Ordnung, welche dasselbe Recht beanspruchen können. Diese sechs Transformationen entstehn aus jeder unter ihnen durch die sogenannten sechs Grundtransformationen, bei denen beide Argumente von o anfangen und von denen einige in den Fundamenten auch vorkommen. Ich werde dies eben dadurch deutlich machen, dass ich zuerst sämmtliche Formeln der Gaussischen Transformation aus der Landenschen ableite.

Setzt man:

$$\operatorname{tang}\varphi = i\sin\varphi_0$$
$$\operatorname{tang}\varphi' = i\sin\varphi'_0\,,$$

und verwechselt:

$$\begin{array}{ccc} \varkappa & \text{mit} & \varkappa_{,} \\ \varkappa' & ,, & \varkappa_{,}^{0} \\ \varkappa_{,} & ,, & \varkappa \\ \varkappa_{,}' & ,, & \varkappa^{0}\,, \end{array}$$

so liefern z. B. die folgenden Formeln der Landenschen Transformation:

$$\sin\varphi = \frac{2}{1+\varkappa}\,\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\Delta(\varphi',\varkappa')} = \frac{2}{1+\varkappa}\sin\varphi'\sin\varphi_{,}'\,,$$

$$\cos\varphi = \frac{1-(1+\varkappa_{,}')\sin^2\varphi'}{\Delta(\varphi',\varkappa')}\,,$$

$$\Delta(\varphi\,,\varkappa) = \frac{1-(1-\varkappa_{,}')\sin^2\varphi'}{\Delta(\varphi'\,\varkappa')}\,,$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(1+\varkappa_{,}')\operatorname{tang}\varphi'}{1-(1+\varkappa_{,}')\operatorname{tang}^2\varphi'}\,,$$

$$K_{,}\operatorname{cotang}\varphi = K_{,}'\left\{\operatorname{cotang}\varphi' + \operatorname{cotang}\varphi_{,}'\right\},$$

$$K_{,}\,\Delta(\varphi\,,\varkappa) = K_{,}'\left\{\Delta(\varphi',\varkappa') + \Delta(\varphi_{,}',\varkappa')\right\},$$

$$F(\varphi\,,\varkappa) = \frac{K_{,}}{K_{,}'}\,.\,F(\varphi',\varkappa') = \frac{2K}{K'}\,F(\varphi',\varkappa') = \frac{2}{1+\varkappa}\,F(\varphi',\varkappa')$$

(worin zwischen den Argumenten φ' und $\varphi_{,}'$ die Gleichung:

$$\operatorname{tang}\varphi'\operatorname{tang}\varphi_{,}' = -\frac{1}{\varkappa_{,}'}$$

herrscht) unmittelbar die folgenden:

$$\operatorname{tang}\varphi = (1+\varkappa^0)\,\frac{\operatorname{tang}\varphi_0}{\Delta(\varphi_0\,,\varkappa^0)} = i\,(1+\varkappa^0)\operatorname{tang}\varphi_0\operatorname{tang}\varphi'_0\,,$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos\varphi_0\,\Delta(\varphi_0\,,\varkappa^0)}{1+\varkappa^0\sin^2\varphi_0}\,,$$

$$\frac{\Delta(\varphi\,,\varkappa)}{\cos\varphi} = \frac{1-\varkappa^0\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0\,\Delta(\varphi_0\,,\varkappa^0)}\,,$$

$$\sin\varphi = \frac{(1+\varkappa^0)\sin\varphi_0}{1+\varkappa^0\sin^2\varphi_0}\,,$$

$$K\frac{\Delta(\varphi,\varkappa)}{\sin\varphi} = K^0\left\{\frac{1}{\sin\varphi_0} - \frac{1}{\sin\varphi'_0}\right\},$$

$$K\frac{\Delta(\varphi,\varkappa)}{\cos\varphi} = K^0\left\{\frac{\Delta(\varphi_0,\varkappa^0)}{\cos\varphi_0} + \frac{\Delta(\varphi'_0,\varkappa^0)}{\cos\varphi'_0}\right\},$$

$$F(\varphi,\varkappa) = \frac{K}{K^0}F(\varphi_0,\varkappa^0) = \frac{2K_,}{K_,^0}F(\varphi_0,\varkappa^0) = \frac{2}{1+\varkappa_,}F(\varphi_0,\varkappa^0) = (1+\varkappa^0)\,F(\varphi_0,\varkappa^0),$$

$$\sin\varphi_0\sin\varphi'_0 = \frac{1}{\varkappa^0}.$$

Es sind dies die bekannten Transformationsformeln, von welchen Sie auch in Ihrem Briefe ausgegangen sind. Da nun:

$$\varphi = am\,(u,\varkappa)$$

gesetzt, nach den eben gewesenen Formeln:

$$\varphi_0 = am\left(\frac{K^0}{K}u,\varkappa^0\right)$$

wird, so erkennt man hieraus aufs Neue, wie diese Formeln, in die Analysis der elliptischen Funktionen übersetzt, auf dieselbe Weise wie die Landenschen zur Fortsetzung geeignet werden.

Ich will nur, da Sie die 12 Grundformeln in Ihrem Schreiben aus dieser Transformation abgeleitet haben, einige Worte über die Anwendung derselben auf die zweite Gattung hinzufügen. Man findet aus denselben Formeln folgende Gleichung:

$$\cos\varphi\cos\varphi_0 = \frac{(1+\varkappa^0)}{\sin\varphi}\,\frac{\sin\varphi_0}{\Delta(\varphi_0,\varkappa^0)} - (1+\varkappa^0)\sin\varphi\,\frac{\sin\varphi_0}{\Delta(\varphi_0,\varkappa^0)},$$

welcher man nach leichter Reduktion die Form:

$$d\,(\cos\varphi\sin\varphi_0) = \frac{1+\varkappa^0-\Delta^2(\varphi_0,\varkappa^0)}{\varkappa^0}\cdot\frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0,\varkappa^0)} + \frac{\Delta^2(\varphi,\varkappa)-1}{\sqrt{\varkappa^0}\,\varkappa}\,\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)}$$

geben kann. Die Integration derselben führt dann auf die Gleichung:

$$\varkappa^0\cos\varphi\sin\varphi_0 = \frac{\sqrt{\varkappa^0}}{\varkappa}\left(E(\varphi,\varkappa) - F(\varphi,\varkappa)\right) - \left(E(\varphi_0,\varkappa^0) - (1+\varkappa^0)\,F(\varphi_0\,\varkappa^0)\right).$$

Setzt man darin:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

also auch, was sich aus den Formeln zwischen φ_0 und φ leicht ergiebt:

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

und zieht die dafür geltende Gleichung von dieser ab, so erhält man nach Einführung der obigen Werthe für $\varkappa^0$ und der Funktionen:

$$Z(\varphi,\varkappa),\quad Z(\varphi_0,\varkappa^0),$$

so wie mit Benutzung der Gleichung:

$$K\,F(\varphi_0,\varkappa^0) = K^0\,F(\varphi,\varkappa),$$

die Gleichung:

$$Z(\varphi,\varkappa) = \frac{2K^0}{K}Z(\varphi_0,\varkappa^0) + \varkappa^0\left(\frac{2K^0}{K}\right)\cos\varphi\sin\varphi_0.$$

Es ist dies die von Gauss in der Abhandlung determ. attract. für die zweite Gattung angegebene Transformation auf die Funktion Z $(\varphi,\varkappa)$ übertragen, und es ergiebt sich aus ihr durch Fortsetzung die elegante Formel:

$$Z(\varphi,\varkappa) = \varkappa\,(\sqrt{\varkappa^0}\cos\varphi\sin\varphi_0 + \sqrt{\varkappa^0}\sqrt{\varkappa^{00}}\cos\varphi_0\sin\varphi_{00} + \text{etc.}),$$

welche einen ebenso einfachen Algorithmus zur Berechnung von:

$$Z(\varphi, \varkappa)$$

gewährt, als die oben von Legendre gefundene. Man kann sich aber leicht davon überführen, dass diese Formel in elliptischen Funktionen keine wesentlich andere ist, als die aus der Landenschen mit Verkleinerung der Moduln entstandene.

In der That ist sie dann:

$$Z(u,\varkappa) - \frac{2K^0}{K} \cdot Z\left(\frac{K^0}{K}u,\varkappa^0\right) = \varkappa^2\, c\, u\, s\left(\frac{K^0}{K}u,\varkappa^0\right) = \frac{\frac{2\varkappa^0 K^0}{K}\, s\left(\frac{K^0}{K}u,\varkappa^0\right) c\left(\frac{K^0}{K}u,\varkappa^0\right) \Delta\left(\frac{K^0}{K}u,\varkappa^0\right)}{\left(1+\varkappa^0\, s^2\frac{K^0}{K}u\right)}.$$

Da nun aber aus dem Additionstheoreme der 2. Gattung die Gleichung folgt:

$$2\,Z\left(\frac{K^0}{K}u,\varkappa^0\right) - Z\left(2\frac{K^0}{K}u,\varkappa^0\right) = \varkappa^0\varkappa^0\, s^2\left(\frac{K^0}{K}u,\varkappa^0\right) s\left(2\frac{K^0}{K}u,\varkappa^0\right),$$

so erhält man, nach Elimination von:

$$Z\left(\frac{K^0}{K}u,\varkappa^0\right),$$

und mit Benutzung der aus dem Additionstheorem folgenden Formel:

$$\frac{2\, s\left(\frac{K^0}{K}u\right) c\left(\frac{K^0}{K}u\right) \Delta\left(\frac{K^0}{K}u\right)}{1-\varkappa^0\varkappa^0\, s^4\left(\frac{K^0}{K}u\right)} = s\left(\frac{2K^0}{K}u,\varkappa^0\right),$$

die Gleichung:

$$Z(u,\varkappa) = \frac{K^0}{K}\, Z\left(\frac{2K^0}{K}u,\varkappa^0\right) + \frac{\varkappa^0 K^0}{K}\, s\left(\frac{2K^0}{K}u,\varkappa^0\right).$$

Zieht man nun noch die, aus dem Additionstheorem der Integrale der zweiten Gattung folgende Gleichung hinzu:

$$Z(u,\varkappa) - Z(u+K,\varkappa) = \varkappa^2\, \frac{s(u,\varkappa)\, c(u,\varkappa)}{\Delta(u,\varkappa)},$$

welche auf die früher direkt abgeleitete:

$$Z(u,\varkappa) - Z(u+K,\varkappa) = \frac{\varkappa^0 K^0}{K}\, s\left(\frac{2K^0}{K}u,\varkappa^0\right)$$

führt, so gelangt man endlich zu derjenigen der Gleichungen II'.:

$$Z(u,\varkappa) + Z(u+K,\varkappa) = \frac{2K^0}{K}\, Z\left(\frac{2K^0}{K}u,\varkappa^0\right),$$

welche meiner obigen einfachsten Art der Fortsetzung und Entwicklung zu Grunde liegt, und direkt aus der Landenschen Transformation abgeleitet wurde. Es dürfte zu weit führen auf alle übrigen vier vorher angedeuteten Transformationsformeln in ihrer algebraischen Form ebenso näher einzugehn. Die erste derselben folgere ich aus der Landenschen dadurch, dass ich für:

$$\varkappa = \lambda$$

$$\sin\varphi \ldots \lambda \sin\psi$$

$$\sin\varphi' \ldots \lambda' \sin\psi'$$

setze, und daher:

$$\sqrt{\lambda}\, \sin\psi = \frac{\sin\psi'\, \Delta(\psi',\lambda')}{\cos\psi'}$$

erhalte, wo:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda}\right) = \lambda' ,$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}\right) = \pm \sqrt{\lambda'\lambda' - 1}$$

gesetzt ist. In der That ergeben sich daraus die Formeln:

$$\cos\psi = \frac{\Delta^2(\psi',\lambda') \pm \lambda'\sqrt{\lambda'\lambda'-1}\,\sin^2\psi'}{\cos\psi'} ,$$

$$\Delta(\psi,\lambda) = \frac{\Delta^2(\psi',\lambda') \mp \lambda'\sqrt{\lambda'\lambda'-1}\,\sin^2\psi'}{\cos\psi'} ,$$

und hieraus die Transformations - Gleichung:

$$\int_0^{\psi'} \frac{d\varphi'}{\Delta(\varphi',\lambda')} = \sqrt{\lambda} \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\lambda)} .$$

Mag λ grösser oder kleiner als 1 sein, stets wird λ' die Einheit übertreffen, und:

$$\lambda'' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda'}} + \sqrt{\lambda'}\right)$$

der Einheit näher liegen als λ'.

In der That erkennt man sofort den Grad dieser Annäherung aus der Formel:

$$\lambda''\lambda'' - 1 = \frac{1}{4\lambda'(\lambda'+1)^2}(\lambda'\lambda'-1)^2 .$$

Die Variabeln ψ und ψ' stehn in Bezug auf die Stetigkeit ihres Fortschreitens in dem Zusammenhang, dass:

$$\sin\varphi = y , \quad \sin\varphi' = y'$$

gesetzt, y und y' zugleich folgende Intervalle stetig durchwandern.

Wenn $\lambda > 1$ ist:

$$y': \; -\infty \ldots\ldots o \ldots\ldots \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}} \ldots\ldots \frac{1}{\lambda'} \ldots\ldots 1 \ldots\ldots \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}} \ldots\ldots \infty ,$$

$$y: \; -\infty \ldots\ldots o \ldots\ldots \frac{1}{\lambda} \ldots\ldots o \ldots\ldots \infty \ldots\ldots \lambda \ldots\ldots \infty ,$$

und wenn $\lambda < 1$ ist:

$$y': \; -\infty \ldots\ldots o \ldots\ldots \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}} \ldots\ldots \frac{1}{\lambda'} \ldots\ldots 1 \ldots\ldots \sqrt{\frac{1}{\lambda\lambda'}} \ldots\ldots \infty ,$$

$$y: \; -\infty \ldots\ldots o \ldots\ldots \lambda \ldots\ldots o \ldots\ldots \infty \ldots\ldots \frac{1}{\lambda} \ldots\ldots \infty .$$

Hieraus ergeben sich die zur Uebertragung dieser Transformation in elliptische Funktionen erforderlichen Relationen zwischen den betreffenden bestimmten Integralen. — Die drei übrigen Transformationen zweiter Ordnung sind die folgenden:

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{\lambda_,}} \frac{\sin\varphi'\,\Delta(\varphi',\lambda')}{\Delta^2(\varphi',\lambda') - i\lambda'\lambda_,'\sin^2\varphi'} ,$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos\varphi'}{\Delta^2(\varphi',\lambda') - i\lambda'\lambda_,'\sin^2\varphi'} ,$$

$$\Delta(\varphi,\lambda) = \frac{\Delta^2(\varphi',\lambda') + i\lambda'\lambda_,'\sin^2\varphi'}{\Delta^2(\varphi',\lambda') - i\lambda'\lambda_,'\sin^2\varphi'} ,$$

worin:

$$\lambda_,' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_,}} + \sqrt{\lambda_,}\right),$$

$$i\lambda' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_,}} - \sqrt{\lambda_,}\right)$$

gesetzt wird, und die Gleichung:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_,}} \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi',\lambda')}$$

dazu gehört; ferner:

$$\sin\varphi = \frac{i(1 \pm \lambda_,')}{\lambda'} \frac{\sin\varphi' \cos\varphi'}{\cos^2\varphi' \pm \lambda_,' \sin^2\varphi'},$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos^2\varphi' \mp \lambda_,' \sin^2\varphi'}{\cos^2\varphi' \pm \lambda_,' \sin^2\varphi'},$$

$$\Delta(\varphi,\lambda) = \frac{\Delta(\varphi',\lambda')}{\cos^2\varphi' \pm \lambda_,' \sin^2\varphi'},$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\lambda)} = \frac{i(1 \pm \lambda_,')}{\lambda'} \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi'}{\Delta(\varphi',\lambda')},$$

worin:

$$\lambda_,' \lambda_,' = \left(\frac{\lambda_, - i\lambda}{\lambda_, + i\lambda}\right)^2,$$

$$\lambda' \lambda' = \frac{4\, i\lambda\lambda'}{(\lambda_, + i\lambda)^2},$$

gesetzt wird; endlich:

$$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{\lambda'} \sin\varphi'}{1 + \lambda' \sin^2\varphi'},$$

$$\cos\varphi = \frac{1 - \lambda' \sin^2\varphi'}{1 + \lambda' \sin^2\varphi'},$$

$$\Delta(\varphi,\lambda) = \frac{\cos\varphi'\, \Delta(\varphi',\lambda')}{1 + \lambda' \sin^2\varphi'},$$

$$\lambda' \lambda' = \left(\frac{\lambda + i\lambda_,}{\lambda - i\lambda_,}\right)^2,$$

$$\lambda_,' \lambda_,' = \frac{4\, i\lambda\lambda_,}{(\lambda - i\lambda_,)^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\lambda)} = 2\sqrt{\lambda'} \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi'}{\Delta(\varphi',\lambda')}.$$

Auf die Natur dieser 4 Transformationen näher einzugehn, würde zu weit führen. Sie gewähren, wenn gleich ihre Moduln und Argumente imaginair sind, eben solche Anwendung auf die Entwickelung der elliptischen Funktionen, als die Landensche und die Gaussische.

Diese aus ihnen folgenden Entwicklungen lassen sich jedoch weit einfacher und natürlicher ebenso direkt durch geeignete Aenderungen des Arguments der ganzen Integralwerthe, und der daraus folgenden, der Grösse $q_,$ entsprechenden, ableiten, wie ich in meinem ersten Briefe die Entwickelungen nach der Grösse q aus denen nach der Grösse $q_,$ abgeschrieben habe.

Ich habe zu diesem Zweck eine vollständige Tafel der 6 Grundfunktionen für meine Zuhörer entworfen, und da dieselbe mit den Gegenständen im nächsten Zusammenhang steht, nach welchen Sie mich, verehrter Freund, vor einiger Zeit gefragt haben, so werde ich Ihnen dieselbe auch noch mittheilen. Ich pflege dieselbe, ähnlich wie es in den Fundamenten § 31 bei zweien derselben gemacht ist, durch Integration auf imaginairem Wege abzuleiten, um sie dann später bei den schwierigern und allgemeinern Grund-Transformationen der vier ϑ Funktionen als die einfachsten sechs Fälle der sechs Jacobischen Klassen wieder aufzunehmen. Diese letztere hat der grosse Meister bekanntlich auf zwei wesentlich verschiedenen Wegen behandelt. Der erstere, auf welchem er sie zuerst gefunden, erwartet seine Veröffentlichung bei der in Aussicht stehenden Herausgabe der schon in meinem ersten Briefe erwähnten grössern Vorlesungen Jacobi's, der zweite ist in einer spätern kürzern Vorlesung eingeschlagen. Beide erfordern kunstreiche zahlentheoretische Betrachtungen, und diese Untersuchungen gehören zu den schönsten die Jacobi angestellt hat. Da bei der definitiven Durchführung immer noch einige nicht ganz unerhebliche Bedenken übrig blieben, so habe ich vor einigen Jahren einen meiner Herrn Zuhörer, den jetzigen Oberlehrer Fuhrmann, veranlasst, diese ganze Theorie auf dem zweiten Wege nach meiner Angabe zusammenzustellen. Er hat dies gut ausgeführt, und seine Resultate mit den später von Hermite bekannt gemachten in Uebereinstimmung gebracht. Der vielfältige Gebrauch meiner nun folgenden Tafel besteht darin, dass aus jeder endlichen Formel, oder unendlichen Entwickelung in der Theorie der elliptischen Funktionen, 5 andere richtige dadurch entstehn, dass man an die Stelle der in der ersten Horizontalreihe stehenden Grössen respective die in den folgenden stehenden setzt.

Tafel I.

Klasse I.	u	$\varkappa$	$\varkappa,$	K	$iK,$	q	$s(u,\varkappa)$	$c(u,\varkappa)$	$\Delta(u,\varkappa)$
II.	iu	$\varkappa,$	$\varkappa$	$K,$	iK	$q,$	$i\frac{s(u,\varkappa)}{c(u,\varkappa)}$	$\frac{1}{c(u,\varkappa)}$	$\frac{\Delta(u,\varkappa)}{c(u,\varkappa)}$
III.	$\varkappa u$	$\frac{1}{\varkappa}$	$\frac{i\varkappa,}{\varkappa}$	$\varkappa K - i\varkappa K,$	$i\varkappa K,$	q'	$\varkappa s(u,\varkappa)$	$\Delta(u,\varkappa)$	$c(u,\varkappa)$
IV.	$-\varkappa, u$	$-\frac{i\varkappa}{\varkappa,}$	$\frac{1}{\varkappa,}$	$\varkappa, K$	$-\varkappa, K + i\varkappa, K,$	$-q$	$-\varkappa,\frac{s(u,\varkappa)}{\Delta(u,\varkappa)}$	$\frac{c(u,\varkappa)}{\Delta(u,\varkappa)}$	$\frac{1}{\Delta(u,\varkappa)}$
V.	$-i\varkappa, u$	$\frac{1}{\varkappa,}$	$-\frac{i\varkappa}{\varkappa,}$	$i\varkappa, K + \varkappa, K,$	$i\varkappa, K$	$-q'$	$-i\varkappa,\frac{s(u,\varkappa)}{c(u,\varkappa)}$	$\frac{\Delta(u,\varkappa)}{c(u,\varkappa)}$	$\frac{1}{c(u,\varkappa)}$
VI.	$i\varkappa u$	$\frac{i\varkappa,}{\varkappa}$	$\frac{1}{\varkappa}$	$\varkappa K,$	$i\varkappa K + \varkappa K,$	$-q,$	$i\varkappa\frac{s(u,\varkappa)}{\Delta(u,\varkappa)}$	$\frac{1}{\Delta(u,\varkappa)}$	$\frac{c(u,\varkappa)}{\Delta(u,\varkappa)}$

Man hat aus dieser Tafel die Formeln abzuleiten:

$$s\,(iu\,,\varkappa_{,}) = i\,\frac{s\,(u\,,\varkappa)}{c\,(u\,,\varkappa)}\,,$$

$$c\,(iu\,,\varkappa_{,}) = \frac{1}{c\,(u\,,\varkappa)}\,,$$

$$\Delta\,(iu\,,\varkappa_{,}) = \frac{\Delta\,(u\,,\varkappa)}{c\,(u\,,\varkappa)}\,.$$

$$s\left(\varkappa u,\frac{1}{\varkappa}\right) = \varkappa\; s\,(u\,,\varkappa)\,,$$

$$c\left(\varkappa u,\frac{1}{\varkappa}\right) = \Delta\,(u\,,\varkappa)\,,$$

$$\Delta\left(\varkappa u,\frac{1}{\varkappa}\right) = c\,(u\,,\,)\,.$$

u. s. w. Die folgenden Triples ergeben sich sofort aus diesen beiden, (welche eben direkt aus der Transformation abgeleitet auch schon in den Fundamenten § 19 und § 31 vorkommen) successive durch abwechselnde Anwendung von selbst.

In der That entstehn die Formeln:

der Klasse VI aus denen der Klasse III, wie die der Klasse II aus denen der Klasse I,
der Klasse IV aus denen der Klasse VI, wie die der Klasse III aus denen der Klasse I,
der Klasse V aus denen der Klasse V, wie die der Klasse II aus denen der Klasse I,

und daher erhalten wir die 3 folgenden Triples:

$$s\left(\varkappa_{,}u\,,\,-\frac{i\varkappa}{\varkappa_{,}}\right) = \varkappa_{,}\,\frac{s\,(u\,,\varkappa)}{\Delta\,(u\,,\varkappa)}\,,$$

$$c\left(\varkappa_{,}u\,,\,-\frac{i\varkappa}{\varkappa_{,}}\right) = \frac{c\,(u\,,\varkappa)}{\Delta\,(u\,,\varkappa)}\,,$$

$$\Delta\left(\varkappa_{,}u\,,\,-\frac{i\varkappa}{\varkappa_{,}}\right) = \frac{1}{\Delta\,(u\,,\varkappa)}\,.$$

$$s\left(i\varkappa_{,}\,u\,,\frac{1}{\varkappa_{,}}\right) = i\varkappa_{,}\,\frac{s\,(u\,,\varkappa)}{c\,(u\,,\varkappa)}\,,$$

$$c\left(i\varkappa_{,}\,u\,,\frac{1}{\varkappa_{,}}\right) = \frac{\Delta\,(u\,,\varkappa)}{c\,(u\,,\varkappa)}\,,$$

$$\Delta\left(i\varkappa_{,}\,u\,,\frac{1}{\varkappa_{,}}\right) = \frac{1}{c\,(u\,,\varkappa)}\,.$$

$$s\left(i\varkappa u, \frac{i\varkappa_\prime}{\varkappa}\right) = i\varkappa \frac{s(u,\varkappa)}{\Delta(u,\varkappa)},$$

$$c\left(i\varkappa u, \frac{i\varkappa_\prime}{\varkappa}\right) = \frac{1}{\Delta(u,\varkappa)},$$

$$\Delta\left(i\varkappa u, \frac{i\varkappa_\prime}{\varkappa}\right) = \frac{c(u,\varkappa)}{\Delta(u,\varkappa)}.$$

Man entnimmt ferner der obigen Tabelle die Bemerkung, dsss die dem 4ten Theil des ersten Periodenindex K, und der Hälfte des zweiten $iK_\prime$ bei der Funktion $s(u,\varkappa)$, bei den übrigen 5 Funktionen entsprechenden, folgende sind.

Tafel II.

Funktion:	Viertel des ersten Periodenindex:	Hälfte des zweiten Periodenindex:
$s\left(u, \varkappa\right)$	K	$iK_\prime$
$s\left(iu, \varkappa_\prime\right)$	$-iK_\prime$	K
$s\left(\varkappa u, \frac{1}{\varkappa}\right)$	$K - iK_\prime$	$iK_\prime$
$s\left(\varkappa_\prime u, \frac{\varkappa}{i\varkappa_\prime}\right)$	$-K$	$K - iK_\prime$
$s\left(i\varkappa_\prime u, \frac{1}{\varkappa}\right)$	$-K + iK_\prime$	$-K$
$s\left(i\varkappa u, \frac{i\varkappa_\prime}{\varkappa}\right)$	$-iK_\prime$	$K - iK_\prime$

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass die übrigen Grundformeln der Theorie, welche man ebenfalls durch direkte Umformung findet, und auf denen die ganze Theorie der Periodicität aufgebaut werden kann, ich meine die Formeln der Fundamerte § 17 und § 19, in etwas anderer Weise geordnet:

$$s\,(u+K) = \frac{c\,u}{\Delta\,u},$$

$$c\,(u+K) = -\frac{\varkappa_{,}\,s\,u}{\Delta\,u},$$

$$\Delta\,(u+K) = \frac{\varkappa_{,}}{\Delta\,u},$$

$$s\,(u+iK_{,}) = \frac{1}{\varkappa\,s\,u},$$

$$c\,(u+iK_{,}) = -\frac{i}{\varkappa}\,\frac{\Delta\,u}{s\,u},$$

$$\Delta\,(u+iK_{,}) = -\frac{i\,c\,u}{s\,u},$$

$$s\,(u+K+iK_{,}) = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{\Delta\,u}{c\,u},$$

$$c\,(u+K+iK_{,}) = -\frac{i\,\varkappa_{,}}{\varkappa}\,\frac{1}{c\,u},$$

$$\Delta\,(u+K+iK_{,}) = i\varkappa_{,}\,\frac{s\,u}{c\,u},$$

---

bei den übrigen Funktionen, welche in der Tafel vorkommen, in Bezug auf ihre dem K und $iK_{,}$ entsprechenden Periodenindicestheile, ganz dieselben sind. In der That versteht sich dies eigentlich bei der Art ihrer Entstehung von selbst, doch werde ich bei den ersten beiden Funktionentriples, den Nachweis hier noch führen.

Es ist

$$s\,(i(u-iK_{,}),\varkappa_{,}) = i\,\frac{s\,(u-iK_{,})}{c\,(u-iK_{,})} = \frac{1}{\Delta\,u} = \frac{c\,(i\,u,\varkappa_{,})}{\Delta\,(i\,u,\varkappa_{,})},$$

$$c\,(i(u-iK_{,}),\varkappa_{,}) = \frac{1}{c\,(u-iK_{,})} = -i\varkappa\,\frac{s\,u}{\Delta\,u} = -\varkappa\,\frac{s\,(i\,u,\varkappa_{,})}{\Delta\,(i\,u,\varkappa_{,})},$$

$$\Delta\,(i(u-iK_{,}),\varkappa_{,}) = \frac{\Delta\,(u-iK_{,})}{c\,(u-iK_{,})} = \frac{\varkappa\,c\,u}{\Delta\,u} = \frac{\varkappa}{\Delta\,(i\,u,\varkappa_{,})}.$$

$$s\,(i\,(u+K)\,,\varkappa_,) = i\,\frac{s\,(u+K)}{c\,(u+K)} = -\,\frac{i}{\varkappa_,}\,\frac{c\,u}{s\,u} = \frac{1}{\varkappa_,\,s\,(iu\,,\varkappa_,)}\,,$$

$$c\,(i(u+K)\,,\varkappa_,) = \frac{1}{c\,(u+iK\,,\varkappa)} = -\,\frac{1}{\varkappa_,}\,\frac{\Delta\,u}{s\,u} = -\,\frac{i}{\varkappa_,}\,\frac{\Delta\,(iu\,,\varkappa_,)}{s\,(iu\,,\varkappa_,)}\,,$$

$$\Delta\,(i(u+K)\,,\varkappa_,) = \frac{\Delta\,(u+K)}{c\,(u+K)} = -\,\frac{1}{s\,u} = -\,i\,\frac{c\,(iu\,,\varkappa_,)}{s\,(iu\,,\varkappa_,)}\,,$$

woraus dann das 3te Triple sich von selbst als richtig erweiset. —

Ebenso einfach ergeben sich folgende Triples bei der folgenden Funktion:

$$s\left(\varkappa\,(u+K-iK_,)\,,\frac{1}{\varkappa}\right) = \frac{c\left(\varkappa u\,,\frac{1}{\varkappa}\right)}{\Delta\left(\varkappa u\,,\frac{1}{\varkappa}\right)}\,,$$

$$c\left(\varkappa\,(u+K-iK_,)\,,\frac{1}{\varkappa}\right) = -\,\frac{i\varkappa_,}{\varkappa}\cdot\frac{s\left(\varkappa u\,,\frac{1}{\varkappa}\right)}{\Delta\left(\varkappa u\,,\frac{1}{\varkappa}\right)}\,,$$

$$\Delta\left(\varkappa\,(u+K-iK_,)\,,\frac{1}{\varkappa}\right) = \frac{i\varkappa_,}{\varkappa}\,\frac{1}{\Delta\left(\varkappa u\,,\frac{1}{\varkappa}\right)}\,.$$

$$s\left(\varkappa\,(u+iK_,)\,,\frac{1}{\varkappa}\right) = \frac{\varkappa}{s\left(\varkappa u\,,\frac{1}{\varkappa}\right)}\,,$$

$$c\left(\varkappa\,(u+iK_,)\,,\frac{1}{\varkappa}\right) = -\,i\varkappa\,\frac{\Delta\left(\varkappa u\,,\frac{1}{\varkappa}\right)}{s\left(\varkappa u\,,\frac{1}{\varkappa}\right)}\,,$$

$$\Delta\left(\varkappa\,(u+iK_,)\,,\frac{1}{\varkappa}\right) = -\,i\,\frac{c\left(\varkappa u\,,\frac{1}{\varkappa}\right)}{s\left(\varkappa u\,,\frac{1}{\varkappa}\right)}\,.$$

---

und bei sämmtlichen übrigen, wie aus ihrer successiven Ableitung aus diesen beiden ersten Funktionentriples von selbst in die Augen springt.

Der Charakter jeder der 6 Klassen verdient noch etwas näher beleuchtet zu werden, zumal ich daran noch eine andere nicht unwichtige Bemerkung über den sogenannten „Schlüssel" in der Theorie der elliptischen Funktionen, nach welchem Sie mich vor einiger Zeit gefragt haben, anknüpfen kann.

Nennt man das Viertel des ersten Periodenindex:

$$\Omega\,,$$

und die Hälfte des zweiten Periodenindex:

$$\Omega_,\,,$$

so kann man sich leicht davon überzeugen, dass für:

$$\Omega\,, \qquad \Omega_,$$

respective:

$$\Omega + 2h\ \Omega + 2h_,\ \Omega_,\,, \qquad \Omega_, + 2h'\ \Omega + 2h_,'\ \Omega_,\,,$$

gesetzt, in unserer Tafel nur noch die 6te Colonne geändert wird, falls h, $h_,$, h', $h_,'$ solche ganze Zahlen sind, welche die Gleichung:

$$(2h+1)\ (2h_,'+1) - 2h_, \,.\, 2h_,' = \pm 1$$

befriedigen. In der That wird die in dieser Colonne stehende Grösse:

$$e^{\frac{i\pi\,\Omega_,}{\Omega}}$$

werden, und die 4 Zahlen werden nur so zu bestimmen sein, dass der analytische Modul dieses Ausdrucks kleiner als 1 ist, damit die betreffenden Entwicklungen convergent bleiben. In dem Fall, der uns zuerst und besonders interessirt, wenn nämlich $\varkappa$ reell und zwar ein positiver echter Bruch ist, lässt sich nun leicht das Criterium auffinden, womit dieser Zweck erreicht wird.

In der That wird dann jeder der 6 Ausdrücke, welche an Stelle von:

$$\frac{i\pi\,\Omega_,}{\Omega}$$

n den 6 Klassen vorkommen, die Form haben:

$$\frac{i\pi\,\Omega_,}{\Omega} = 2\,i\,\pi\left(\frac{2\,H'\ K + H_,'\ iK_,}{2\,H\ K + H_,\ iK_,}\right),$$

wenn die betreffenden conjugirten Periodenindices:

$$4\ \Omega = 4\ H\,K + 2\ H_,\ \ i\,K_,\,,$$
$$2\ \Omega_, = 4\ H'\ K + 2\ H_,'\ i\,K_,\,,$$

sind, also die 4 ganzen Zahlen:

$$H,\ H_,\,,\ H',\ H_,'\,,$$

die Gleichung:

$$H\,H_,' - H_,\,H' = \pm 1$$

befriedigen. — Es ist daher:

$$e^{i\pi\,\frac{\Omega_,}{\Omega}} = e^{\frac{4\,(H\,H_,' - H_,H')\,\pi}{4\,H^2\,K^2 + H_,^2\,K_,^2}}\ e^{2\,i\,\pi\,\frac{(4\,H\,H'\,K^2 + H_,\,H_,'\,K_,^2)}{4\,H^2\,K^2 + H_,^2\,K_,^2}}$$

und daher die Gleichung:

$$H\,H_,' - H_,\,H' = 1$$

erforderlich und hinreichend dafür, dass der analytische Modul von:

$$e^{\frac{i\pi\,\Omega_,}{\Omega}}$$

kleiner als 1 ist.

Man sieht hier nachträglich, wie die schon in seiner ersten Vorlesung über elliptische Funktionen (1829) von Jacobi angedeutete Klasseneintheilung, sich durch ihren Ursprung am einfachsten bestätigt. —

In der That kann man dieser letzten Gleichung nicht anders Genüge leisten, als dass **eine** der vier Zahlen H oder **zwei** und zwar aus jedem Paar:

$$\begin{matrix} H & H_, \\ H' & H_,' \end{matrix}$$

eine, **gerade** Zahlen sind.

Bezeichnet man daher durch (± 1) eine ungerade, durch (o) eine gerade Zahl, so erhält man die 6 einzig möglichen Fälle in folgender Tafel:

Tafel III.

H	$H_,$	H'	$H_,'$
$(+1)$	(o)	(o)	$(+1)$
(o)	(-1)	(1)	(o)
$(+1)$	(-1)	(o)	$(+1)$
(-1)	(o)	(1)	(-1)
(-1)	(1)	(-1)	(o)
(o)	(-1)	$(+1)$	(-1)

Lässt man hierin die Klammern weg, so findet man gerade diejenigen je 4 Zahlenwerthe der 4 Zahlen:

$$H, \ H_{,}, \ H', \ H_{,}',$$

welche unserer obigen Tafel zu Grunde liegen, und dieselben als die absolut genommenen kleinsten in jeder Klasse, gerechtfertigt.

Sollen jedoch zugleich die übrigen Triples von Formeln ungeändert bleiben, bei Einführung der neuen conjugirten Periodenindices, so müssen wir die obigen 4 ganzen Zahlen:

$$h, \ h_{,}, \ h', \ h_{,}',$$

sämmtlich gerade annehmen, widrigenfalls die Formeln durch hinzutretende Faktoren -1 zum Theil sich ändern. —

Dies also vorausgesetzt, erhält man im Ganzen 24 verschiedene Triples von Transformationsformeln. Dieselben habe ich in meinen Vorträgen vielfach besprochen, und in einer Abhandlung über die Substitutionen der ersten Ordnung etc. im 34. Bd. des Crelleschen Journals von einer andern Seite her abgeleitet. Dieselben finden vielfachste Anwendung. So erleichtern sie z. B. die Aufstellung der grossen Anzahl von Formeln, welche zum Additionstheorem von 2 Argumenten gehören. Auch die Existenz dieser Formeln, deren einfachste in den Fundamenten § 18 stehn, hat der grosse Schöpfer der Theorie schon in ältester Zeit erkannt, und in der oben erwähnten Vorlesung aus dem Jahr 1836 aus der Multiplikationstheorie der ϑ Funktionen abzuleiten vorgeschlagen. Ich habe dieselben dadurch direkt aus dem Additionstheorem abgeleitet, und in den Vorträgen 1860/61 mittheilen können, dass aus jeder derselben, vermittelst der obengenannten Transformationen, 11, ja eigentlich 47 der übrigen sich ohne Weiteres hinschreiben liessen. In Folge dessen haben schon ältere Zuhörer diese Methode den „Schlüssel" in der Theorie genannt.

Dies grosse Formeltableau hier noch mitzutheilen, dürfte dem eigentlichen Zweck dieses Briefs zu ferne liegen. Wichtiger wäre der von mir auch schon gefundene und frühern Zuhörern im Wesentlichen mitgetheilte Nachweis, wie alle diese Betrachtungen, nicht daran gebunden sind, dass $\varkappa$ ein reeller positiver echter Bruch ist. In der That habe ich, vermittelst richtiger und geeigneter Anwendung der Integration auf imaginärem Wege, diese Untersuchungen zum gewünschten Ziel geführt, und auch in die Theorie der 6 Klassen hineingetragen, wobei sie Jacobi, so weit mir bekannt ist, nicht berührt hat. Die dabei hervortretenden Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Grössen:

$$\varkappa, \quad \sqrt{\varkappa}, \ \sqrt[4]{\varkappa}, \ K, \ \sqrt{K} \quad \text{etc.}$$

als Funktionen von q, erledigen sich durch ihre Darstellung als Lösungen derjenigen Differentialgleichungen, welche Jacobi (im 36. Bd. d. Cr. Journ.) zuerst vollständig angegeben hat.

Ich behalte jedoch die Publikation dieser Gegenstände ebenfalls einer spätern Gelegenheit vor, nachdem die Jacobi'sche Vorlesung herausgegeben sein wird.

Andrerseits dürften die so eben gegebenen Andeutungen nicht überflüssig gewesen sein, um die vorzüglichere Bedeutung der, zugleich ältesten Transformation der 2. Ordnung, ich meine der Landenschen, hervorzuheben, und um zu begreifen, wie aus ihr allein nur mit Hinzunahme weniger Grundformeln die ganze Theorie der elliptischen Funktionen sich entwickeln lässt. So dürfte der Zweck dieses Schreibens, mein hochgeehrter Freund, in der Erschöpfung dieser Betrachtungen erreicht sein. —

Anmerkung.

Das Landensche Theorem.

In einer Abhandlung in den philosophical transactions 1775 pag. 283 hat Landen das Theorem zuerst aufgestellt, aus welchem die nach ihm genannte Transformation der elliptischen Integrale entnommen ist. Die Einfachheit der Deduktion wie sie Landen dort gegeben hat, rechtfertigt es wohl, dieselbe in freiester Uebertragung hier kurz wiederzugeben und einige Bemerkungen hinzuzufügen.

Landen betrachtet drei Kegelschnitte, zwei Ellipsen und eine Hyperbel. Die Centra seien respective:

$$C', \quad C, \quad C_{,},$$

die Scheitelpunkte und Endpunkte der grossen Halbachse:

$$A', \quad A, \quad A_{,},$$

die Endpunkte der beiden kleinen Halbachsen der Ellipsen:

$$B' \text{ und } B.$$

Er nennt die halben grossen Achsen der Ellipsen und die halbe Querachse der Hyperbel respective:

$$C' A' = m, \quad C A = m + n, \quad C_{,} A_{,} = m - n,$$

die dazu gehörigen halben conjugirten Achsen:

$$C' B' = n, \quad C B = 2\sqrt{mn}, \; 2\sqrt{mn},$$

und bestimmt dann drei auf diesen Curven liegende Punkte:

$$D', \quad D, \quad D_{,},$$

welche auf folgende Weise im Zusammenhang stehn. Wenn man auf die in D' an die erste Ellipse gelegte Tangente vom Centrum C' aus, ein Perpendikel fällt, und den Fusspunkt P' nennt, so setzt Landen:

$$D' P' = t,$$

die den Punkt D' bestimmende Grösse; die Absisse des Punktes D, auf der grossen Achse seiner Ellipse von C aus gezählt, soll dann:

$$C E = \frac{m + n}{m - n} t,$$

nud das auf die im Punkte $D_,$ an die Hyperbel gelegte Tangente vom Centrum $C_,$ aus gefällte Perpendikel:

$$C\,P_, = \sqrt{(m-n)^2 - t^2}$$

angenommen werden. —

Landen bestimmt nun die drei Bogenlängen:

$$B'\,D' = \int_0^{x'} \frac{d\,x'}{m} \sqrt{\frac{m^4 - (m^2 - n^2)\,x'\,x'}{m^2 - x'\,x'}}\,,$$

$$B\,D = \int_0^t dt \sqrt{\frac{(m+n)^2 - t^2}{(m-n)^2 - t^2}}\,,$$

$$A_,\,D_, = D_,\,P_, - \int_0^t dt \sqrt{\frac{(m-n)^2 - t^2}{(m+n)^2 - t^2}}\,.$$

Indem nun die Grösse t durch x' ausgedrückt:

$$t = \frac{m^2 - n^2}{m}\,x' \sqrt{\frac{m^2 - x'\,x'}{m^4 - (m^2 - n^2)\,x'\,x'}}$$

giebt, und daraus:

$$x'\,x' = {}^1/_2\,\frac{m^2}{m^2 - n^2}\left\{(m^2 - n^2 + t^2) - \sqrt{((m+n)^2 - t^2)}\;\sqrt{((m-n)^2 - t^2)}\right\}$$

olgt, erhält man die Gleichung:

$$4\int_0^{x'} \frac{dx'}{m} \sqrt{\frac{m^4 - (m^2 - n^2)\,x'\,x'}{m^2 - x'\,x'}} = 2\,t + \int_0^t dt \sqrt{\left(\frac{(m+n)^2 - t^2}{(m-n)^2 - t^2}\right)} + \int_0^t dt \sqrt{\frac{(m-n)^2 - t^2}{(m+n)^2 - t^2}}$$

oder, geometrisch ausgesprochen, das Landensche Theorem:

$$4\,B'\,D' - B\,D + A_,\,D_, = 2\,D'\,P' + D_,\,P_,\,.$$

Um dasselbe in der Normalform der elliptischen Integrale auszudrücken, hat man:

$$x' = m \sin \varphi' \qquad \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m} = \varkappa'$$

$$t = (m-n) \sin \varphi \qquad \frac{m-n}{m+n} = \varkappa$$

zu setzen, und erhält dann die von Legendre gegebene, in meinem zweiten Briefe vorkommende Gleichung:

$$E\,(\varphi', \varkappa') = \frac{1}{1+\varkappa}\,E\,(\varphi, \varkappa) - \frac{1-\varkappa}{2}\,F\,(\varphi, \varkappa) + \frac{\varkappa}{1+\varkappa} \sin \varphi\,,$$

auf welche sich eben diese Anmerkung bezieht, während die zwischen t und x' bestehende Gleichung, zu der Transformationsformel führt:

$$\sin\varphi = \frac{2}{1+\varkappa}\,\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\Delta(\varphi',\varkappa')},$$

aus welcher Legendre die Gleichung:

$$F(\varphi,\varkappa) = \frac{2}{1+\varkappa}\,F(\varphi',\varkappa')$$

ableitet. —

Ich habe nicht ermitteln können, ob Landen selbst schon, eine sich fast von selbst darbietende Eigenschaft der drei von ihm betrachteten Kegelschnitte bemerkt hat, welche zuerst von Lagrange in der Abhandlung in den Turiner Memoiren 1784—85 pag. 237 in dem Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels bei dieser Transformation weiter verfolgt worden ist.

Es können nämlich offenbar die drei genannten Kegelschnitte so concentrisch vereinigt werden, dass die Scheitelpunkte und Brennpunkte der zweiten Ellipse respective in die Brennpunkte und Scheitelpunkte der Hyperbel fallen, und dass der vierte Theil ihrer grossen Achse das arithmetische, und der vierte Theil ihrer kleinen Achse das geometrische Mittel zwischen den beiden Halbachsen der ersten Ellipse, die Focaldistanz der ersten Ellipse das geometrische Mittel zwischen der halben grossen Achse und der Focaldistanz bei der zweiten Ellipse, so wie endlich die halbe grosse Achse der ersten Ellipse das arithmetische, und ihre Focaldistanz das geometrische Mittel zwischen den beiden Focaldistanzen der andern beiden Kegelschnitte ist. — Dies folgt einfach daraus, dass die Focaldistanzen der drei Curven respective:

$$\sqrt{m^2-n^2}\,,\quad m-n\,,\quad m+n$$

sind. Man ersieht hieraus geometrisch, dass bei fortgesetzter Transformation die Focaldistanzen der Ellipsen zuletzt verschwinden, und genauer ausgesprochen, dass jede kleiner ist, als das Quadrat der vorhergehenden.

So ist der Uebergang der Rectification der Ellipse in die des Kreises vermittelst des Landen'schen Satzes geometrisch anschaulich gemacht.

Führt man statt:

$$\Delta(\varphi,\varkappa)\,,\quad \Delta(\varphi',\varkappa')\,,$$

die ihnen gleichen Ausdrücke:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2\cos^2\varphi + mn\sin^2\varphi}}{\frac{m+n}{2}}\,,\qquad \frac{\sqrt{m^2\cos^2\varphi' + n^2\sin^2\varphi'}}{m}$$

ein, so geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi'}{\sqrt{mm\cos^2\varphi' + nn\sin^2\varphi'}} = {}^1/_2\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2\cos^2\varphi + mn\sin^2\varphi}},$$

und gestattet dann eine ebensolche Fortsetzung wie die Gaussische (det. attr. p. 44), von welcher sie sich nur durch den Faktor $^1/_2$ unterscheidet. Setzt man in der That für φ' . . . T, und führt an Stelle der Variabeln φ, die die Gleichung:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\left\{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2\cos^2\varphi + mn\sin^2\varphi\right\}}} = 2\int_0^{T}\frac{dT'}{\sqrt{\left\{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2\cos^2 T' + mn\sin^2 T'\right\}}}$$

befriedigende Grösse T' ein, so folgen daraus (wie in meinem ersten Briefe in etwas anderer Bezeichnung ausgeführt ist) die zwei Gaussischen Gleichungen:

$$\sin T = \frac{2m \sin T'}{(m+n)\cos^2 T' + 2m \sin^2 T'},$$

$$\frac{dT}{\sqrt{(m^2\cos^2 T + n^2 \sin^2 T)}} = \frac{dT'}{\sqrt{\left(\frac{m+n^2}{2}\right)\cos^2 T' + mn \sin^2 T'}}.$$

Jacobi hat (Fund. § 38 und Crell. Journal 26 B. pag. 97) vortreffliche Beiträge zu dieser Transformation gegeben. Ich halte übrigens die zur Berechnung des in der Landen'schen Transformation vorkommenden neuen Arguments φ zu benutzende Gleichung:

$$m \operatorname{tang}(\varphi - \varphi') = n \operatorname{tang} \varphi'$$

wenigstens für ebenso geeignet, als die in der Gaussischen.

Man kann endlich nach folgendem Satz, die Punkte $D,$ und D' aus dem Punkt D leicht geometrisch deuten.

„Es ist φ das Complement der excentrischen Anomalie des Punktes D und $\varphi,$ seine „wahre Breite, es sei zugleich φ die wahre Breite eines Hülfspunktes E, dann ist φ' die halbe „wahre Anomalie von E in derselben zweiten Ellipse, anderseits $\varphi,$ das Complement „der excentrischen Anomalie des Punktes $D,$ auf der Hyperbel, und φ' das Com„plement der excentrischen Anomalie des Punktes D' auf der ersten Ellipse."

In der That ist die von Landen eingeführte Grösse t, da φ' das Complement der excentrischen Anomalie des Punktes D' in der ersten Ellipse ist:

$$t = \frac{(m^2 - n^2)\sin\varphi' \cos\varphi'}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi' + n^2\sin^2\varphi'}}.$$

Hieraus folgt, da die Abscisse des Punktes D in der zweiten Ellipse:

$$\left(\frac{m+n}{m-n}\right) t,$$

und:

$$t = (m-n)\sin\varphi$$

angenommen wurde, dass φ das Complement der excentrischen Anomalie dieses Punktes in dieser Ellipse ist.

Anderseits herrscht zwischen der wahren Breite φ eines Punkts E und der halben wahren Anomalie desselben in der zweiten Ellipse dieselbe Gleichung, welche zwischen den Winkeln φ und φ' herrscht:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(m+n)\operatorname{tang}\varphi'}{m - n\operatorname{tang}^2\varphi'}.$$

Es folgt hieraus die genannte Bedeutung von φ' in der zweiten Ellipse.

Wenn endlich die Coordinaten des Punktes $D,$ in der Hyperbel durch:

$$x, = \frac{m-n}{\sin\varphi,}, \quad y, = 2\sqrt{mn}\,\text{cotang}\,\varphi,$$

ausgedrückt werden, (wonach $\varphi,$ das Complement seiner excentrischen Anomalie in der Hyperbel genannt wird) so wird das obige Perpendikel vom Centrum auf die in ihm an die Hyperbel gelegte Tangente:

$$C, P, = \frac{2\sqrt{mn}\sin\varphi,}{\sqrt{(m+n)^2\cos^2\varphi, + 4mn\sin^2\varphi,}},$$

und da dasselbe Perpendikel:

$$= \sqrt{(m-n)^2 - t^2} = (m-n)\cos\varphi$$

angenommen wurde, so folgt daraus:

$$\frac{2\sqrt{mn}}{m+n}\,\text{tang}\,\varphi, = \text{cotang}\,\varphi,$$

d. h. die oben genannte Bedeutung von $\varphi,$ in der zweiten Ellipse.

Man hat also zur Construction der Punkte D' und $D,$ nur nöthig in der zweiten Ellipse aus der excentrischen Anomalie $\varphi.$ des Punktes D seine wahre Breite, und aus der wahren Breite φ des Punktes E seine wahre Anomalie zu construiren. Indem man sich hiebei des Satzes bedient, dass die der excentrischen Anomalie und dem Complement der wahren Breite entsprechenden Radien-Vectoren einer Ellipse ein dem Rechteck zwischen den beiden Halbachsen gleiches Rechteck bilden, kann man die bezeichnete constructive Bestimmung der Punkte D' und $D,$ aus dem gegebenen D vermittelst der Peripherien der drei Kegelschnitte, und der excentrischen Kreise mit den Radien von den Längen:

$$m, \quad n, \quad m+n, \quad 2\sqrt{mn}, \quad m-n$$

eicht ausführen. --

Die Landensche Transformation lässt jedoch folgende weit einfachere Construction zu, welche ich aus der von Jacobi (Crell. J. B. 32) angegebenen abgeleitet habe.

An den beiden Endpunkten A und B des Durchmessers eines Kreises um O, dessen Radius der Einheit gleich ist, errichte man zwei Perpendikel in entgegengesetzter Richtung, das eine $AC = 1$, das andere BM unbestimmt lang. Dann trage man auf dem Durchmesser, vom Centrum nach B zu, $OP = x$ an, ziehe durch P eine mit BM gleichgerichtete Parallele, ziehe von ihrem Durchschnittspunkt mit dem Kreise: G eine Parallele mit dem Durchmesser, und ziehe von ihrem Durchschnittspunkte D mit BM, die Gerade DC, so schneidet dieselbe den Durchmesser in einem solchen Punkte P^0, dass $OP^0 = x^0$ ist. Macht man den Kreisbogen $AF = 2\varphi$, zieht P^0F, und $BF^0 \parallel P^0F$, so ist der Kreisbogen $AF^0 = 2\varphi^0$. —

Man sieht sofort, wie hieraus weiter die Punkte P^{00} P^{000} etc. und die Punkte F^{00}, F^{000} etc. der Art zu construiren sind, dass:

$$OP^{00} = x^{00}, \qquad OP^{000} = x^{000}, \text{ etc.}$$

$$\text{Bogen } AF^{00} = 2\varphi^{00}, \quad \text{Bogen } AF^{000} = 2\varphi^{00}, \text{ etc.}$$

gefunden werden, und wie umgekehrt aus $\varkappa$ und φ die Grössen:

$$\varkappa', \quad \varkappa'' \ldots$$

$$\varphi', \quad \varphi'' \ldots$$

durch Construction sich ergeben. Die Formeln:

$$\sqrt{(1 - \varkappa\varkappa)} = \varkappa_, = \frac{1 - \varkappa^0}{1 + \varkappa^0},$$

$$\sin(2\varphi - \varphi^0) = \varkappa^0 \sin \varphi^0$$

$$\sqrt{(1 - \varkappa'\varkappa')} = \varkappa_,' = \frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa},$$

$$\sin(2\varphi' - \varphi) = \varkappa \sin \varphi$$

führen gerade zu auf diese ihre geometrische Darstellung.

Druck der Universitäts-Buch- und Steindruckerei von E. J. Dalkowski in Königsberg.



